数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 1-16

有理型単葉関数の係数について

東京学大 教育　窪田 佳尚

1. Riemann の写像定理により，任意の単連結領域は円板の内部および外部に等角に写像されることが知られている。ここでは，その写像の係数の評価を問題にする。その問題は次のように正規化して考えられる。

$|z|<1$ で正則単葉な関数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

の族を S とおき，$f(z)\,(\in S)$ の逆関数を

$$\varphi(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n w^n$$

とおくとき，$\sup_{f\in S}|\alpha_n|$ を求めよ。また，$|z|>1$ で正則単葉な関数

$$g(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{-n}$$

の族を Σ_0 とおき，$g(z)\ (\in \Sigma_0)$ の逆関数を

$$\phi(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^{-n}$$

とおくとき，$\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n|$ を求めよ。

$\sup_{f \in S} |\alpha_n|$ に関しては，Löwner [5] によって完全な解決が得られている：

$$\sup_{f \in S} |\alpha_n| = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)\cdot 2^n}{(n+1)!} \qquad (n \geqq 2).$$

他方，$\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n|$ に関しては，まだ完全な解決は得られていない。Springer [8] は $\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_3| = 1$ を証明し，また次の予想を述べた：

$$g_p(z) = z(1+z^{-p})^{\frac{2}{p}} \qquad (p：正の整数)$$

の逆関数を

$$\phi_p(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(p)} w^{-n}$$

とおくとき，

$$\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n| = -c_n^{(p)},$$

ここで p は $n+1$ の最小素約数である。

この予想が $n=1, 2$ のとき正しいことは $\beta_1 = -b_1$，$\beta_2 = -b_2$ より明らかである。また $n = 5, 7, 9$ のときこの予想が正しいことは [4] で証明されている。いろいろな考察から n が奇数

のときの予想

$$\sup_{g\in\Sigma_0}|\beta_{2k-1}| = -c^{(2)}_{2k-1} = \frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!}$$

は正しいように思われる。一方 $n=4$ のとき，関数

$$g(z) = z\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{5}}\left(1-\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{e^{-i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \qquad \left(\cos\alpha = -\frac{1}{4}\right)$$

の逆関数を考えると

$$\beta_4 = \frac{2}{5}+\frac{3}{8} > \frac{2}{5} = -c^{(5)}_4$$

となりこの予想は正しくない。

ここでは Σ_0 のある部分族 Σ_0^* を考え，$\sup_{g\in\Sigma_0^*}|\beta_n|$ を問題にする。

定義．$g(z)\in\Sigma_0$ かつ，$w=g(z)$ による $\{z\,|\,|z|>1\}$ の像領域の補集合が $w=0$ に関して starlike となるような関数 $g(z)$ の族を Σ_0^* とおく。

このとき，$\sup_{g\in\Sigma_0^*}|\beta_n| = \sup_{g\in\Sigma_0^*}\mathrm{Re}\{\beta_n\}$ であるから以後

(1) $\qquad \sup_{g\in\Sigma_0^*}\mathrm{Re}\{\beta_n\}$

を問題にする。

Σ_0^* は compact であるから極値問題(1) の極値関数(すなわち値 $\sup_{g\in\Sigma_0^*}\mathrm{Re}\{\beta_n\}$ を達成するような関数) は存在する。ま

た Nehari-Netanyahu の論文 [6] における同じ論法によって極値関数 $g(z)$ は

$$(2) \qquad g(z) = z\prod_{\nu=1}^{n+1}\left(1-e^{i\theta_\nu}z^{-1}\right)^{\mu_\nu}, \quad \mu_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1}\mu_\nu = 2$$

の形をしていることが分かる。

ここでは Σ_0^* の中で変分を考え，極値関数に関する別の必要条件を与える。

定理. $g(z)$ が極値問題 (1) の極値関数ならば，微分方程式

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{zg'(z)}{g(z)}\left(zF_n(z) - \lambda z + \frac{\bar{\lambda}}{z} - \frac{1}{z}\overline{F_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{n}z^2F_n'(z) - \lambda z + (n+1)\beta_n - \frac{\bar{\lambda}}{z} + \frac{1}{n}\frac{1}{z^2}\overline{F_n'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \end{aligned}$$

をみたす。ここで $F_n(z)$ は $g(z)$ の逆関数 $\phi(w)$ の Faber 多項式

$$\log\frac{\phi(w)-t}{w} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F_n(t)w^{-n}$$

であり，λ はある定数である。

2. $f(z)\in S$ かつ $w=f(z)$ による $\{z \mid |z|<1\}$ の像領域が $w=0$ に関して starlike であるような関数 $f(z)$ の族を S^* とおき，さらに $f(z)\in S^*$ かつ $a_2=0$ となるような関数 $f(z)$ の

族を S_0^* とおくことにする。$g(z)\in\Sigma_0^*$ と $f(z)=1/g(\frac{1}{z})\in S_0^*$ とは同値であるから，Σ_0^* の代りに S_0^* の中で変分を考える。

Hummel [2], [3] は S^* の中で次のような変分を考えた。$f(z)$ を S^* の元とする。$w=f(z)$ による $\{z \mid |z|<1\}$ の像領域をDとおき，Dの境界をCとおく。$f(z)$ の逆関数を $\varphi(w)$ とおき，w_0 をD内の一点，α を $|\alpha|=1$ なる複素数，ε を正の実数とするとき，

$$w^*=w\left\{1+\varepsilon\left(\alpha\frac{1-\overline{\varphi(w_0)}\varphi(w)}{\varphi(w)-\varphi(w_0)}+\bar{\alpha}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{1-\overline{\varphi(w_0)}\varphi(w)}\right)\right\}$$

によるCの像を C^* とおくと，C^* は starlike なある単連結領域 D^* の境界になる。そこで $\{z \mid |z|<1\}$ を D^* に等角に写す関数

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^n$$

を考え

$$f^*(z)=\frac{F(z)}{A_1}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n^* z^n$$

とおくと $f^*(z)\in S_0^*$ となり，$\varepsilon\to 0$ のとき $f^*(z)\to f(z)$ となるような S_0^* 内の関数族が得られる。

そこで，$f(z)\in S_0^*$ から S_0^* に属する $f^*(z)$ を得るために，

$$w^*=w\left\{1+\varepsilon\sum_{\nu=1}^{2}\left(\alpha x_\nu\frac{1-\overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w)}{\varphi(w)-\varphi(w_\nu)}+\bar{\alpha}\bar{x}_\nu\frac{\varphi(w)-\varphi(w_\nu)}{1-\overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w)}\right)\right\}$$

を考え，$w_\nu \in D$ および複素数 x_ν を適当にとって，$f^*(z) \in S_0^*$ となるようにする。

$g(z)$ を極値問題 (1) の極値関数とする。$g(z)$ の逆関数を

$$(4) \qquad \phi(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^{-n}$$

とおき，$f(z) = 1/g(\frac{1}{z})$，さらに $f(z)$ の逆関数を $\varphi(w)$ とおく。$g(z)$ は (2) の形をしているから $\varphi(w)$ は $w = f(z)$ による $\{z \mid |z|<1\}$ の像領域 D の境界 C 上まで，有限個の点を除いて解析的に接続できる。そこで

$$(5) \qquad w^* = w + \varepsilon v(w),$$

$$(6) \qquad v(w) = w \sum_{\nu=1}^{2} \left(\alpha x_\nu \frac{1-\overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w)}{\varphi(w)-\varphi(w_\nu)} + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \frac{\varphi(w)-\varphi(w_\nu)}{1-\overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w)} \right)$$

$$(\varepsilon > 0,\ |\alpha| = 1,\ w_\nu \in D,\ x_\nu : \text{複素数})$$

による C の像を C^* とおき，C^* を境界とする starlike な単連結領域を D^* とおくと，[1] の理論を適用することによって，D^* を $\{z \mid |z|<1\}$ に等角に写し，$w=0$ を $z=0$ に写す写像は

$$(7) \qquad e^{i\theta}\varphi(w)\left(1 - \varepsilon q(w) + o(\varepsilon)\right) \equiv e^{i\theta}\varphi^*(w)$$

で与えられることが分かる。ただし

$$(8) \qquad q(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(t)^2 v(t)}{\varphi(t)(\varphi(t)-\varphi(w))}dt + \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(t)^2 v(t)}{\varphi(t)(1-\overline{\varphi(w)}\varphi(t))}dt\right)}\varphi(w),$$

ここで Γ は w を含む D のある部分領域 Δ の境界で，有限個の解析曲線から成っているものとする。

(9) $$\tilde{\varphi}(w)=\frac{1}{\varphi^*(\frac{1}{w})}=cw+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n w^{-n}$$

とおき

(10) $$\phi^*(w)=\tilde{\phi}\left(\frac{w}{c}\right)=w+\mathfrak{z}_0^*+\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{z}_n^* w^{-n}$$

とおくと $\phi^*(w)$ は Σ に属する starlike なある関数 $f^*(z)$ の逆関数になる。(7)，(9) より

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\zeta^{n-1}\tilde{\varphi}(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{1}{w^{n+1}\varphi^*(w)}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{1}{w^{n+1}\varphi(w)}\{1+\varepsilon q(w)+o(\varepsilon)\}dw$$

$$=\beta_n+\varepsilon\gamma_n+o(\varepsilon)\qquad (n\geqq -1),$$

ただし

(11) $$\gamma_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{q(w)}{w^{n+1}\varphi(w)}dw\qquad (n\geqq -1)$$

であって，$c_{-1}=c$，$\mathfrak{z}_{-1}=1$ である。従って (10) より

(12) $$\beta_0^*=\varepsilon\gamma_0+o(\varepsilon)$$

(13) $$\beta_n^*=\beta_n+\varepsilon(\gamma_n+n\gamma_{-1}\beta_n)+o(\varepsilon)$$

を得る。

そこで $\beta_0^* = 0$ となるように x_ν, w_ν をとり，任意の ε, α に対して不等式

$$\mathcal{R}e\{\beta_n^*\} \leqq \mathcal{R}e\{\beta_n\}$$

が成り立つことより，極値関数 $g(z)$ がみたすべき微分方程式を導く。

3. $\gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n \ (n \geqq 0)$ の計算

(8) に (6) を代入して $t = w$, w_ν における留数を計算することによって

$$\begin{aligned} g(z) = \sum_{\nu=1}^{2} \Bigg[\left(1 - |\varphi(w_\nu)|^2\right) \Bigg\{ & \alpha x_\nu \frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)(\varphi(w) - \varphi(w_\nu))} + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu \frac{w\varphi'(w)}{\overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w)(1 - \overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w))} \\ & - \alpha x_\nu \frac{w_\nu \varphi'(w_\nu)\varphi(w)}{\varphi(w_\nu)^2(\varphi(w) - \varphi(w_\nu))} + \alpha x_\nu \frac{w_\nu \varphi'(w_\nu)}{\varphi(w_\nu)^2} + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu \frac{\bar{w}_\nu \overline{\varphi'(w_\nu)}\varphi(w)}{\overline{\varphi(w_\nu)}(1 - \overline{\varphi(w_\nu)}\varphi(w))} \Bigg\} \\ & - \frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)} \left\{ \alpha x_\nu \overline{\varphi(w_\nu)} + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu \frac{1}{\overline{\varphi(w_\nu)}} \right\} \Bigg] \end{aligned}$$

を得る。次にこれを (11) に代入し

$$\varphi(w) = 1/\phi(\zeta) \quad , \quad w = 1/\zeta \quad , \quad w_\nu = 1/\zeta_\nu$$

を用いると

$$\begin{aligned} \gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2} \Bigg[& \frac{\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^n \phi'(\zeta)\phi(\zeta)}{\phi(\zeta_\nu) - \phi(\zeta)} d\zeta \\ & + \frac{\bar{\alpha}\bar{x}_\nu \overline{\phi(\zeta_\nu)}^2}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^n \phi'(\zeta)\phi(\zeta)}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}\phi(\zeta) - 1} d\zeta - \frac{\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu)\phi(\zeta_\nu)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^{n-1}\phi(\zeta)}{\phi(\zeta_\nu) - \phi(\zeta)} d\zeta \end{aligned} \tag{14}$$

$$+\alpha x_\nu \beta_n \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) + \frac{\bar{\alpha}\bar{x}_\nu \bar{\zeta}_\nu \overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^{n-1}\phi(\zeta)}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}\phi(\zeta)-1}\,d\zeta$$

$$+ n\beta_n\left\{-\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu) + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu \overline{\phi(\zeta_\nu)} + \alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu)\right\}\Big]$$

を得る。ここでFaber多項式を導入する。$\phi(\zeta)$に対して

$$(15) \qquad \log\frac{\phi(\zeta)-t}{\zeta} = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}F_m(t)\zeta^{-m}$$

で定義される多項式$F_m(t)$を$\phi(\zeta)$のFaberの多項式という。

(15)の両辺をtおよびζで微分することによって

$$(16) \qquad \frac{1}{\phi(\zeta)-t} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}F_m'(t)\zeta^{-m}$$

$$(17) \qquad \frac{\zeta\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)-t} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}F_m(t)\zeta^{-m}$$

を得る。従って、$n \geqq 1$のとき、(14)はこのFaber多項式を用いて

$$\gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n = \sum_{\nu=1}^{2}\frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2-1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2}$$

$$\times\Big[\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu)\phi(\zeta_\nu)\Big\{\frac{1}{n+1}F_{n+1}'(\phi(\zeta_\nu)) + \frac{\beta_1}{n-1}F_{n-1}'(\phi(\zeta_\nu)) + \cdots + \frac{\beta_k}{n-k}F_{n-k}'(\phi(\zeta_\nu))$$

$$+\cdots+\beta_{n-1}F_1'(\phi(\zeta_\nu)) + \frac{(n+1)\beta_n}{\phi(\zeta_\nu)}\Big\}$$

$$(18) \qquad +\bar{\alpha}\bar{x}_\nu\bar{\zeta}_\nu\frac{\overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big\{\frac{1}{n+1}F_{n+1}'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big) + \frac{\beta_1}{n-1}F_{n-1}'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big) + \cdots$$

$$+\frac{\beta_k}{n-k}F_{n-k}'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big) + \cdots + \beta_{n-1}F_1'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)\Big\}$$

$$-\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)\Big\{F_{n+1}(\phi(\zeta_\nu))+\beta_1 F_{n-1}(\phi(\zeta_\nu))+\cdots+\beta_k F_{n-k}(\phi(\zeta_\nu))$$

$$+\cdots+\beta_{n-1}F_1(\phi(\zeta_\nu))+(n+1)\beta_n\Big\}$$

$$+\bar{\alpha}\,\bar{x}_\nu\,\overline{\phi(\zeta_\nu)}\Big\{F_{n+1}\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)+\beta_1 F_{n-1}\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)+\cdots+\beta_k F_{n-k}\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)$$

$$+\cdots+\beta_{n-1}F_1\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)+(n+1)\beta_n\Big\}\Big]$$

と表わされる。ところで，(16)，(17) の両辺の ζ^{-n} の係数を比較することによって

$$\frac{1}{n+1}F_{n+1}'(t)+\frac{\beta_1}{n-1}F_{n-1}'(t)+\cdots+\beta_{n-1}F_1'(t)=\frac{t}{n}F_n'(t),$$

$$F_{n+1}(t)+\beta_1 F_{n-1}(t)+\cdots+\beta_{n-1}F_1(t)+(n+1)\beta_n=tF_n(t)$$

を得る。よって (18) は

$$\gamma_n+n\gamma_{-1}\beta_n=\sum_{\nu=1}^{2}\frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2-1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2}$$

$$\times\Big[\alpha x_\nu\zeta_\nu\phi'(\zeta_\nu)\Big\{\frac{\phi(\zeta_\nu)^2F_n'(\phi(\zeta_\nu))}{n}+(n+1)\beta_n\Big\}+\bar{\alpha}\,\bar{x}_\nu\bar{\zeta}_\nu\overline{\phi'(\zeta_\nu)}\frac{F_n'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)}{n\,\overline{\phi(\zeta_\nu)}^2}$$

$$-\alpha x_\nu\phi(\zeta_\nu)^2F_n(\phi(\zeta_\nu))+\bar{\alpha}\,\bar{x}_\nu F_n\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\Big)\Big]$$

となる。そこで

$$T(\zeta)=\frac{|\phi(\zeta)|^2-1}{|\phi(\zeta)|^2}\Big[\zeta\phi'(\zeta)\Big\{\frac{1}{n}\phi(\zeta)^2F_n'(\phi(\zeta))+(n+1)\beta_n+\frac{1}{n\phi(\zeta)^2}\overline{F_n'\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta)}}\Big)}\Big\}$$

(19)

$$-\phi(\zeta)^2F_n(\phi(\zeta))+\overline{F_n\Big(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta)}}\Big)}\Big]$$

とおくと

$$\mathcal{R}e\{\gamma_n + n\gamma_{-1}\mathfrak{z}_n\} = \mathcal{R}e\left[\alpha\{x_1 T(\zeta_1) + x_2 T(\zeta_2)\}\right] \tag{20}$$

を得る。

同様にして

$$\gamma_0 = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2}\left[\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu)\phi(\zeta_\nu) + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu\bar{\zeta}_\nu \frac{\overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}} - \alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)^2 + \bar{\alpha}\bar{x}_\nu\right]$$

を得る。従って

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= \frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2}\{\zeta\phi'(\zeta)\phi(\zeta) - \phi(\zeta)^2\}, \\ B(\zeta) &= \frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2}\left\{\zeta\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} + 1\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\{\gamma_0\} &= \mathcal{R}e\left[\alpha\{x_1(A(\zeta_1) + B(\zeta_1)) + x_2(A(\zeta_2) + B(\zeta_2))\}\right], \\ \mathcal{I}m\{\gamma_0\} &= \mathcal{I}m\left[\alpha\{x_1(A(\zeta_1) - B(\zeta_1)) + x_2(A(\zeta_2) - B(\zeta_2))\}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

となる。

4. 次に，$\beta_0^* = 0$ となるように x_ν，w_ν をとることによって (13)，(20) から微分方程式を得る議論を行う。

(I) $\frac{1}{\zeta_0} \in D$ かつ $|A(\zeta_0)| \neq |B(\zeta_0)|$ なる ζ_0 が存在する場合。このとき，ζ_2 として ζ_0 をとり，ζ_1 として $\frac{1}{\zeta} \in D$ なる任意の ζ をとる。そのとき $\beta_0^* = 0$ となるためには，

$$x_1 = 1 + o(1),$$

$$(23)\qquad x_2 = \frac{1}{|A_0|^2-|B_0|^2}\left\{-\bar{A}_0 A(\zeta)+\bar{B}_0 B(\zeta)+\bar{\alpha}^2\left(\bar{B}_0\overline{A(\zeta)}-\bar{A}_0\overline{B(\zeta)}\right)\right\}+o(1)$$

とおけばよい。ただし $A_0=A(\zeta_0)$, $B_0=B(\zeta_0)$.

このとき，$g^*(z)\in\sum_0^*$ となるから

$$\mathcal{R}e\{\beta_n^*\}\leqq\mathcal{R}e\{\beta_n\}.$$

よって (13) より

$$\mathcal{R}e\{\gamma_n+n\gamma_{-1}\beta_n+o(1)\}\leqq 0.$$

従って (20) より

$$\mathcal{R}e\{\alpha x_1 T(\zeta)+\alpha x_2 T_0+o(1)\}\leqq 0$$

ただし，$T_0=T(\zeta_0)$. これに (23) を代入すると

$$\mathcal{R}e\left[\alpha T(\zeta)+\frac{1}{|A_0|^2-|B_0|^2}\left\{\alpha\left(-\bar{A}_0A(\zeta)+\bar{B}_0B(\zeta)\right)T_0+\bar{\alpha}\left(\bar{B}_0\overline{A(\zeta)}-\bar{A}_0\overline{B(\zeta)}\right)T_0\right\}\right.$$
$$\left.+o(1)\right]\leqq 0.$$

そこで

$$\lambda=\frac{\bar{A}_0T_0-B_0\bar{T}_0}{|A_0|^2-|B_0|^2}$$

とおくと

$$\mathcal{R}e\left[\alpha\left\{T(\zeta)-\lambda A(\zeta)-\bar{\lambda}B(\zeta)\right\}+o(1)\right]\leqq 0$$

を得る。ここで $\varepsilon\to 0$ とすると

$$\mathcal{R}e\left[\alpha\left\{T(\zeta)-\lambda A(\zeta)-\bar{\lambda}B(\zeta)\right\}\right]\leqq 0$$

となり，α が $|\alpha|=1$ なる任意の複素数であることから微分方

程式

$$T(\zeta)-\lambda A(\zeta)-\bar{\lambda}B(\zeta)=0$$

を得る。ところで

$$\frac{|\phi(\zeta)|^2-1}{|\phi(\zeta)|^2}\neq 0 \qquad (\zeta^{-1}\in D)$$

であるから、この方程式より

$$\zeta\phi'(\zeta)\left\{\frac{1}{n}\phi(\zeta)^2F_n'(\phi(\zeta))-\lambda\phi(\zeta)+(n+1)\mathfrak{z}_n-\frac{\bar{\lambda}}{\phi(\zeta)}+\frac{1}{n}\frac{1}{\phi(\zeta)^2}\overline{F_n'\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta)}}\right)}\right\}$$
$$-\phi(\zeta)\left\{\phi(\zeta)F_n(\phi(\zeta))-\lambda\phi(\zeta)+\frac{\bar{\lambda}}{\phi(\zeta)}-\frac{1}{\phi(\zeta)}\overline{F_n\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta)}}\right)}\right\}=0$$

を得る。これを $g(z)$ に関する微分方程式にかきなおすことによって定理の微分方程式 (3) を得る。

(II) $\frac{1}{\zeta}\in D$ なる任意の ζ に対して $|A(\zeta)|=|B(\zeta)|$ となる場合。

このとき、

$$\zeta\phi'(\zeta)\phi(\zeta)-\phi(\zeta)^2=e^{i\theta}\left(\zeta\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)}+1\right)$$

であるから、極値関数 $g(z)$ は

$$(z^2+e^{i\theta})g'(z)=(z-e^{i\theta}z^{-1})g(z)$$

をみたす。これに $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$ を代入して

$$z^2+(e^{i\theta}-b_1)+\cdots = z^2+(b_1-e^{i\theta})+\cdots .$$

よって $b_1=e^{i\theta}$. 従って

$$g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$$

を得る。ところで，$g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$ の逆関数は

$$\phi(w)=w-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}e^{ik\theta}w^{-(2k-1)}$$

であるから，nが偶数のとき $g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$ は (1) の極値関数ではあり得ない。また $n=2k-1$ のとき $g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$ が (1) の極値関数ならば，

$$\theta=\frac{\pi}{k}+2m\pi \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

でなければならない。$g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$ の逆関数の Faber 多項式は

$$F_{2k-1}(t)=t^{2k-1}+e^{i\theta}{}_{2k-1}C_1\,t^{2k-3}+\cdots+e^{i\nu\theta}{}_{2k-1}C_\nu\,t^{2k-2\nu-1}$$
$$+\cdots+e^{i(k-1)\theta}{}_{2k-1}C_{k-1}\,t$$

であるから $g(z)=z+e^{i\theta}z^{-1}$，$\theta=\frac{\pi}{k}+2m\pi$ は $\lambda=0$ で微分方程式 (3) をみたす。

以上より定理は証明された。

5．$n=4$ のとき微分方程式 (3) は

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}\left(z^5+4b_1z^3+4b_2z^2+(4b_3+6b_1^2-\lambda)z-(4\bar{b}_3+6\bar{b}_1^2-\bar{\lambda})z^{-1}-4\bar{b}_2z^{-2}-4\bar{b}_1z^{-3}-z^{-5}\right)$$
$$=z^5+2b_1z^3+b_2z^2-\lambda z-5(b_4+3b_1b_2)-\bar{\lambda}z^{-1}+\bar{b}_2z^{-2}+2\bar{b}_1z^{-3}+z^{-5}$$

となる。§1 で述べた関数

$$g(z)=z\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{5}}\left(1-\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{e^{-i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \quad . \left(\cos\alpha=-\frac{1}{4}\right)$$

は Σ_0^* に属し，かつ，$\lambda=\frac{9}{16}$ でこの微分方程式をみたす。この事実と，他のいろいろな考察から

$$\sup_{g\in\Sigma_0^*}|b_4|=\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$$

と思われる。

参考文献

[1] P. L. Duren and M. Schiffer, The theory of the second variation in extremal problems for univalent functions. J. Analyse Math. 10 (1962/63) 193～252.

[2] J. A. Hummel, A variational method for starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) 82～87.

[3] J. A. Hummel, Extremal problems in the class of starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 741～747.

[4] Y. Kubota, Coefficients of meromorphic univalent functions. Kōdai Math. Sem. Rep. 28 (1977) 253～261

[5] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I. Math. Ann. 89

(1923) 103~121.

[6] Z. Nehari and E. Netanyahu, On the coefficients of meromorphic schlicht functions. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 15~23.

[7] Ch. Pommerenke, Univalent functions. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1975.

[8] G. Springer, The coefficients problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle. Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 421~450.