

有限鏡映群の不変式 — 特にE型 —

埼玉大 理 矢野 環

京都大 理 関口 次郎

§0. ユークリッド空間  $E = \mathbb{R}^l$  における、鏡映から生成された有限群は、完全に決定され、Coxeter群と呼ばれて色々な性質が知られている。(Bourbaki: Lie Algebra 45)

$E$  の作用が既約であるものを、既約Coxeter群と呼ぶことにする。既約Coxeter群  $W_l$  は、 $l$ 個の鏡映からなる生成元の集合  $S = \{s_1, \dots, s_l\}$  をもち、 $W_l$  はそれら  $s_i$  間の基本関係式

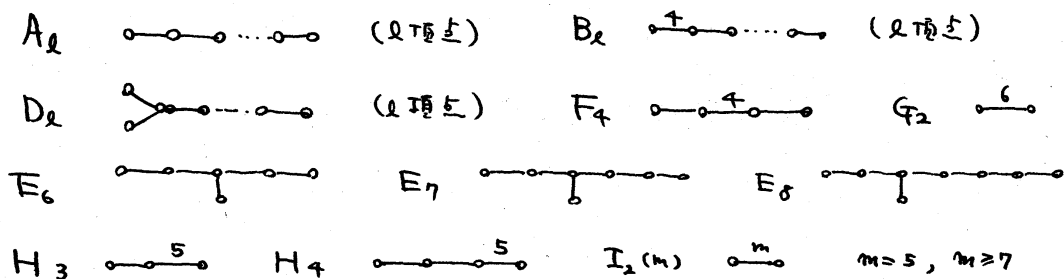
$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = e, \quad s_i^2 = e \quad \text{によって定まる群となる。}$$

ここには  $m_{ij}$  は自然数 <sup>$\geq 2$</sup> であり、 $m_{ij} \geq 3$  の時、 $s_i$  と  $s_j$  を、上は  $m_{ij}$  を書き下した積分で結ぶことにより、グラフを得る。これを

$(W_l, S)$  のグラフと呼ぶ。既約Coxeter群のグラフは、

次のものに限る。(一般のCoxeter群は既約Coxeter群の直積となり、そのグラフは、グラフの和集合となる。) 線分上に書き下した数字は、 $m_{ij} \geq 4$  のときのみ記す。

表1  $(W_l, S)$



このうち上3行は、Lie環のRoot系、Weyl群に対応するものである。第4行は、2, 3, 4次元に於ける、例外的の正多面体の合同群である。(  $A_l, B_l$  は  $l$ 次元での正  $l+1, 2l$  面体の合同群。  $B_l \in C_l$  と見れば正  $2l$ 面体のうち。  $F_4, H_4$  は4次元の正24面体, 正120 (又は600) 面体,  $H_3$  は3次元の正12 (又は20) 面体,  $I_2(m)$  は正  $m$  角形のうち  $m \geq 3$  の合同群である。)

$E$  (又は dual  $E^*$ ) の symmetric algebra  $\wedge W_E$  は自然に作用するが、その不変式環について次のことを知らせている。

定理1  $R = S(E^*)^{W_E}$  は多項式環に同型であり、同次式により生成される。

即ち、 $E^*$  の basis と  $\xi_1, \dots, \xi_l$  とすれば、 $R = R[x_1, \dots, x_l]$  となり各  $x_i$  は  $\xi_i$  の同次  $m_i$  次式であるようにとれる。

表2 ( $m_i$ )

$A_l$ :	$m_i = i+1$	$B_l$ :	$m_i = 2i$
$D_l$ :	$l=2k$ $m_i=2i$ $i \leq k, m_i=2(i-1)$ $i > k$ $l=2k+1$ $m_i=2i$ $i \leq k, m_{k+1}=l, m_i=2(i-1)$ $i > k+1$	$F_4$ :	2, 6, 8, 12
$E_6$ :	2, 5, 6, 7, 8, 12	$E_7$ :	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18
$E_8$ :	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	$G_2$ :	2, 6
$H_3$ :	2, 6, 10	$H_4$ :	2, 12, 20, 30
$I_2(m)$ :	2, m		

$x_i$  の具体的変形は,  $A_\ell, B_\ell, D_\ell$  については比較的容易に  
 与えられるが, 他の場合には, 殆ど存在証明の域を出  
 ていないのが実状であった. J. S. Frame [ ] は特殊座標系  
 を用いて  $E_6$  の不変式を表示している. 又, A. Borel - F. Hirzebruch [ ]  
 は  $F_4$  の  $x_2, x_6, x_8$  について言及している.

我々は, 後のべの研究の必要上, すべての不変式を,  
 explicit に決定することを志した.

以下  $W_\ell$  は既約 Coxeter 群とする. 又,  $m_1 \leq \dots \leq m_\ell$  と仮定す.

### §1 行列 $M(W_\ell)$

$E$  の正規直交基を  $\{e_i\}$  と, dual basis を  $\{\xi_i\}$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$W_\ell \hookrightarrow O(E) (O(E^*))$  (直交群) とみなせることより, 2 次の  
 不変式は (一つしかなく以上)  $x_i = \xi_i^2 + \dots + \xi_\ell^2$  とおけばよい.

$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \right)$  と定める.  $W_\ell \hookrightarrow O(E^*)$  を用いて,

$\nabla x_i \cdot \nabla x_j$  は不変式となることかわかる.  $\xi$  として

定義 2  $m_{ij}(x) = \frac{1}{2} \nabla x_i \cdot \nabla x_j,$

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,\ell} \quad (\text{対称行列})$$

この行列  $M(W_\ell)$  について, 斎藤恭司氏並に我々は,  
 次の事実を予想している.

予想 3. 適当な不変式の生成元  $y_1, \dots, y_\ell$  が存在して,

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(y))_{i,j=1,\dots,\ell}$$

の anti-diagonal  $m_{i, l-i}(j)$  以外には, 最高次基本不変式が  
 があるわけではない。

このように  $\{y_i\}$  は (存在する限り, 本質的に) unique である。  
 我々の定めた不変式を用いて調べたところ,  $A_2, B_2, D_2$  の  
 場合,  $F_4, G_2, E_6, H_3, H_4, I_2(m)$   $i=2$  については  
 予想の成立が確かめられている。このうちの場合,  $m_{i, l-i}(y)$   
 は真に  $y_i$  を含む。この  $y_i$  を含む (乗数, weight を  
 含む)  $y_i$  の定数倍を含む) ことは,  $A_2, D_2, E_6$  については  
 斎藤氏らの根拠より保証されてきていることにより,  $B_2$  に  
 ついては, 不変式の形よりわかる。従って, 特に

$$\det M(W_2) = c y_2^2 + \dots \quad (c \neq 0)$$

という形をしている。この式, あるいは予想の幾何学的意  
 味は現在不明である。簡単な一例をあげておく。

$$I_2(m) \quad (I_2(3) = A_2, I_2(4) = B_2, I_2(6) = G_2, I_2(2) = A_1 \times A_1)$$

$$x_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad x_2 = (-2)^m \prod_{i=0}^{m-1} (\cos(i\alpha)\xi_1 + \sin(i\alpha)\xi_2) \quad \alpha = \frac{\pi}{m}$$

$$\text{よって, } M(I_2(m)) = \begin{pmatrix} 2x_1 & mx_2 \\ mx_2 & 2m^2 x_1^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\det M(I_2(m)) = -m^2 (x_2^2 - 4x_1^m)$$

ここで,  $M(W_\ell)$  の重要性について一言しておく.

$\det M(W_\ell) = f(x)$  とおく. ベクトル場  $X_i$  を

$$X_i = \sum m_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{と定めるとき, } \mathcal{G} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{O} X_i$$

は, (5.1) の  $f(x)$  を不変にする Vector 場の垂体になる.

このことが, 奇解の log pole の一般論よりわかる. (として

$f(x)$  の代わりに  $f(x)^\alpha$  の解析的性質が,  $\mathcal{G}$  を通じて充分いかに

することができ. これについては T. Yano - J. Sekiguchi [1][2]

を参照せよ. 我々は,  $\gamma$  の研究のために 不変式を決定

したのである.

## § 2. 不変式の構成.

$W_\ell$  の不変式  $x_1, \dots, x_\ell$  の構成を, 直接に  $\xi_i$  の多項式とし

て行なうことは, (しばしば) 非常に複雑化する. そこで,

次の方法を採用する.

$W_\ell$  の適当な部分群  $W_{\ell-1}$  で,  $(W_\ell, S)$  の  $\gamma$  の

subgraph で表わされるものをとり, 表現空間  $V$  の正規直交

基底  $e_1, e_2, \dots, e_{\ell-1}, e_\ell$  を,  $\{e_1, \dots, e_{\ell-1}\}$  に  $W_{\ell-1}$  が作用

(している) とする.  $V \ni \sum_{i=1}^{\ell-1} \xi_i e_i + x e_\ell$  により dual  $V^*$

の座標を定める.  $W_{\ell-1}$  の基本不変式  $w_1, \dots, w_{\ell-1}$  は

$\xi_i$  により表示される.  $(W_\ell, S) \supset (W_{\ell-1}, S')$

$$S' = \{s_1, \dots, s_{\ell-1}\} \quad \text{とすれば,}$$

$(W_k, S)$  の基本不変式は,  $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_{k-1}, t]$  の元であって  
 鏡映  $S_k$  により不変なものとして特徴づけられる。

さらに, 初めに  $w_1 < \dots < w_{k-1}$  の  $x_i$  を求めることに伴い, 次の方  
 法によって新しい  $x_j$  を定める。即ち,

$$x_i = \varphi_i(w, t) \quad \text{とすれば,}$$

$$\nabla_{(\varphi, t)} x_i \cdot \nabla_{(\varphi, t)} x_j = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \nabla_{\varphi} \varphi_i \cdot \nabla_{\varphi} \varphi_j$$

ここで第2項は  $\nabla_{\varphi} w_k \cdot \nabla_{\varphi} w_k'$  を用いて,  $w$  と  $t$  の式に書き  
 換えることができる。第1項はたまたま  $\mathbb{C}[w, t]$  の元である。

しかし, 左辺は不変式であることは知られている。よって  
 右辺を, すでに知られている不変式  $x_i$  を用いて, 表示でき  
 るかぎり表示した際には, 新しい不変式と以前のものとを  
 多項式であり, 特に,  $\varphi$  の weight の基本不変式の存在が  
 わかっている場合には,  $\varphi$  の表示を得ることとなる。

この構成には,  $m_{ij}$  の weight に十分注意する必要がある。

表 3  $m_{ij}$  の weight の配列。

$E_6$	2	5	6	8	9	12		$E_7$	2	6	8	10	12	14	18
	5	8	9	11	12	15			6	10	12	14	16	18	22
	6	9	10	12	13	16			8	12	14	16	18	20	24
	8	11	12	14	15	18			10	14	16	18	20	22	26
	9	12	13	15	16	19			12	16	18	20	22	24	28
	12	15	16	18	19	22			14	18	20	22	24	26	30
									18	22	24	26	28	30	34

$E_8$

2	8	12	14	18	20	24	30
8	14	18	20	24	26	30	36
12	18	22	24	28	30	34	40
14	20	24	26	30	32	36	42
18	24	28	30	34	36	40	46
20	26	30	32	36	38	42	48
24	30	34	36	40	42	46	52
30	36	40	42	46	48	52	58

上記の方法は、 $H_4$  の不変式も求むる際に、 $H_3$  の不変式係数の多項式として表示した方針に基づくものである。

§3.  $E_6, E_7, E_8$

§2 の方針に従い、不変式の決定を具体的に示す。

詳細はすべて [3] にゆずる。

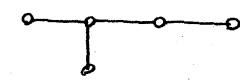
$E_7$  には、 $D_6$  の  $m_{ij}$  の表の次の通りである。

$D_6 : \frac{1}{2} M(D_6)$

対称な部分は省略。

$x_2$					
$2x_4$	$3x_6 + x_2x_8$				
$3x_6$	$4x_8 + 2x_2x_6$	$5x_{10} + 3x_2x_8 + x_4x_6$			
$3x_6'$	$\frac{5}{2}x_2x_6'$	$2x_4x_6'$	$\frac{1}{4}x_{10}$		
$4x_8$	$5x_{10} + 3x_2x_8$	$6x_6'^2 + 4x_2x_{10} + 2x_4x_8$	$\frac{3}{2}x_6x_6'$	$5x_2x_6'^2 + 3x_4x_{10} + x_6x_8$	
$5x_{10}$	$6x_6'^2 + 4x_2x_{10}$	$5x_2x_6'^2 + 3x_4x_{10}$	$x_8x_6'$	$4x_4x_6'^2 + 2x_6x_{10}$	$3x_6x_6'^2 + 4x_8x_{10}$

$E_6$ : 基本不変式  $w_2, w_5, w_6, w_8, w_9, w_{12}$  である。

subdiagram   $D_5$  と呼ばれる。

$\xi$  の不変式  $\Sigma \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_8$  である。 ( $\sigma_j = \xi_1 \cdots \xi_j$ )

即ち,  $V_6 = \mathbb{C}^6$  の <sup>orthonormal</sup> basis  $e_1, e_2, \dots, e_5, e'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_8 - e_7 - e_6)$

$\Sigma \geq 1$ ,  $V$  の元  $\Sigma_{i=1}^5 \xi_i e_i + p e'_6$  の形に表す。

$D_5$  は  $\Sigma \xi_i e_i$  に作用して"る。このとき,

$$w_2 = p^2 + \sigma_2$$

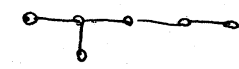
$$w_5 = \frac{1}{24} p^5 - \frac{1}{12} \sigma_2 p^3 + \left(-\frac{1}{8} \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_4\right) p - \sqrt{3} \sigma_5$$

$$w_6 = \frac{1}{6} p^6 - \sigma_2 p^4 + \left(\frac{3}{2} \sigma_2^2 - 5 \sigma_4\right) p^2 - 20\sqrt{3} \sigma_5 p + (-\sigma_2 \sigma_4 + 6 \sigma_6)$$

等表すことができる。

この方法を  $E_7, E_8$  に対して適用する。

$E_7$ : 基本不変式  $y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}$

subdiagram   $D_6$  の基本不変式

$x_2, x_4, x_6, x'_6, x_8, x_{10}$ . ( $\xi_1, \dots, \xi_6$  による表示)

$$V_7 = \mathbb{C}^7 = \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + t e'_7 \quad e'_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_7)$$

$E_8$ :  $z_2, z_8, z_{12}, z_{14}, z_{18}, z_{20}, z_{24}, z_{30}$

subdiagram  $E_7$  及び  $D_7$  が与えられる。どちらにも"る

と表わして"るものが含まれる。



$E_7$  の不変式  $(\tau = t^2)$   $y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}, y_{18}$

$x_2, x_4, x_6, x'_6, x_8, x_{10}$  は  $D_6$  の基本不変式

$$y_2 = \tau + x_2$$

$$y_6 = \frac{1}{4}\tau^3 - \frac{1}{4}x_2\tau^2 + \left(-\frac{11}{4}x_2^2 + 10x_4\right)\tau + (x_2x_4 - 6x_6 - 60x'_6)$$

$$y_8 = \frac{1}{16}\tau^4 - \frac{1}{4}x_2\tau^3 + \left(\frac{5}{8}x_2^2 - x_4\right)\tau^2 + \left(\frac{3}{8}x_2^3 - \frac{5}{2}x_2x_4 + 9x_6 - 78x'_6\right)\tau + (x_4^2 - 3x_2x_6 + 6x_2x'_6 + 12x_8)$$

$$y_{10} = \left(\frac{1}{8}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_4 + x_6 + 2x'_6\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{32}x_2^4 - \frac{1}{4}x_2^2x_4 - 2x_2x'_6 + \frac{1}{2}x_4^2 - 2x_8\right)\tau + (-x_2^2x'_6 + 4x_4x'_6 + 4x_{10})$$

$$y_{12}|_{\tau=0} = \frac{2}{9}x_4^3 - x_2x_4x_6 + 2x_2x_4x'_6 + 3x_6^2 - 36x_6x'_6 - 84x'_6{}^2 + 3x_2^2x_8 - 8x_4x_8 - 12x_2x_{10}$$

$$y_{14}|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}x_2^2x_4x'_6 + 2x_4^2x'_6 + 24x_2x_6{}^2 + 24x'_6x_8 - \frac{3}{2}x_2^2x_{10} + 8x_4x_{10}$$

$$y_{18}|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}x_2^3x'_6{}^2 + 2x_2x_4x'_6{}^2 + 12x_6x'_6{}^2 + 24x'_6{}^3 - x_2^2x'_6x_8 + 4x_4x'_6x_8 + \frac{1}{32}x_2^4x_{10} - \frac{1}{4}x_2^2x_4x_{10} + \frac{1}{2}x_4^2x_{10} + 6x_2x'_6x_{10} + 2x_8x_{10}$$

この決定には、HITAC 8400 を用いて手動計算を併用した。

$y_{12}, y_{14}, y_{18}$  の  $\tau \varepsilon$  を含む完全な式については [ ]

参照.  $m_{ij}'(y) = \frac{1}{4} D y_i \cdot D y_j$  の一部  $\varepsilon$  については,

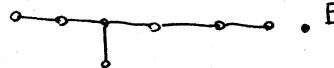
$$m_{6,6} = y_2^2 y_6 + 5 y_2 y_8 + 270 y_{10}, \quad m_{6,8} = 2 y_2^2 y_8 - 3 y_2 y_{10} + 18 y_{12}$$

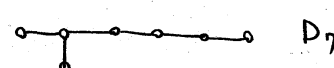
$$m_{8,8} = 9 y_2 y_{12} + 2 y_6 y_8 + 84 y_{14}, \quad m_{6,10} = \frac{5}{2} y_2^2 y_{10} - 14 y_{14}$$

$$m_{8,10} = -\frac{3}{2} y_6 y_{10} - y_2 y_{14}, \quad m_{10,10} = 8 y_{18}$$

$$m_{6,12} = -24 y_6 y_{10} + \frac{7}{3} y_8^2 + 46 y_2 y_{14} + 3 y_2^2 y_{12}$$

$E_8$ :  $V_8 = \mathbb{Q}^8 \rightarrow$  正規直交基  $\varepsilon_i$ , subdiagram  $\rightarrow D_7$  or  $E_7$  にあわせて, 2つ  $\rightarrow$  2) 方が可能である。

  $E_7$  に注目する場合は  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \in$   
 $e_6 \in e_7' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_1), e_8' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 + e_1) \quad \varepsilon \geq 1,$   
 $V \ni \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + t e_7' + u e_8'$  とする。  $\xi, t$  で表示された,  $E_7$  の不変式  $\varepsilon y_i$  とする。

  $D_7$  の場合は  $V \ni \sum_{i=1}^7 \xi_i e_i + r e_8 \in$   
 $\xi \{\xi_1, \dots, \xi_7\}$  で表示された  $D_7$  の基本不変式  $\varepsilon s_2, s_4, s_6, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}$  とする。

$$Z_2 = u^2 + y_2 = r^2 + s_2$$

$$Z_8 = s_2 r^6 + (12s_2^2 - 35s_4) r^4 + (s_2^3 - 14s_2 s_4 + 84s_6) r^2 + 1680 s_4 s_7 r + (s_2^2 s_4 + 10s_4^2 - 36s_2 s_6 + 120s_8)$$

$$Z_8|_{u=0} = y_2 y_6 + 10 y_8$$

$$Z_{12} = \left(\frac{13}{30}s_2^2 - s_4\right) r^8 + \left(\frac{59}{45}s_2^3 - \frac{16}{3}s_2 s_4 + 9s_6\right) r^6 - 84s_7 r^5 + \left(\frac{13}{30}s_2^4 - \frac{47}{15}s_2^2 s_4 + \frac{41}{6}s_4^2 - \frac{11}{5}s_2 s_6 - 6s_8\right) r^4 + 1104 s_2 s_7 r^3 + \left(-\frac{2}{15}s_2^3 s_4 - s_2 s_4^2 + \frac{19}{5}s_2^2 s_6 - 12s_2 s_8 + 176s_{10}\right) r^2 + \left(-7s_2^2 + \frac{88}{3}s_4\right) s_7 r + \left(\frac{13}{30}s_2^2 s_4^2 + \frac{4}{9}s_4^3 - s_2^2 s_8 - \frac{16}{5}s_2 s_4 s_6 + \frac{48}{5}s_6^2 + 10s_2^2 s_8 - 16s_4 s_8 - 16s_2 s_{10} + 192s_{12}\right)$$

$$Z_{14}|_{u=0} = \frac{1}{10} y_6^2 + \frac{1}{3} y_2^2 y_8 + 2y_2 y_{10} + 2y_{12}$$

$$Z_{14}|_{u=0} = \frac{1}{2} y_2^3 y_8 + \frac{28}{5} y_6 y_8 + 3y_2^2 y_{10} + 12y_2 y_{12} + 84y_{14}$$

他はまた check されていゝな。  $DZ_i \cdot DZ_j \rightarrow 181 \geq 12$ ,

$$\frac{1}{4} DZ_8 \cdot DZ_8 = Z_2^3 Z_8 + 30 Z_2 Z_{12} + 50 Z_{14}.$$

[1] T. Yano-J. Sekiguchi, On the microlocal structure of weighted homogeneous polynomials associated to Coxeter groups 1

[2] " - " ; " 2

[3] " - " ; " 3

[4] J. S. Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents 83-119

付記 才一著者は、同時同帯に " Gauss Manin Connection のある filtration と、不変量  $L(f)$  について " と題する講演を行つた。

よかば、斎藤泰司氏の一般論にまつた、ある

filtration の isolated singularity に付する connection の場合は、 $\dim \mathcal{O}_x / \mathcal{O}_x \cdot f$  <sup>(LH-2008)</sup> あり、は b 函数論にまつた色々の不変量によつて記述されたこと、まつた。当講演録の

斎藤氏の原稿も、一般論のまつ記してまつた、私の方も

次の機会にしろさせていゝな。