数理解析研究所講究録
第 324 巻 1978 年 49-53

Schlesinger 方程式における τ 函数

京大数理研　三輪哲二

森川先生のシンポジウム「幾何学における大域的解析学」の解説記事[1]に対する補足として，一次元の Fuch-Schlesinger 型の変形理論における τ 函数 について説明します。Holonomic Quantum Fields II. [2] として詳しい論文が出版の予定なので，証明は省きます。

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上に $n+1$ 個の点 $a_0=\infty$, $a_1, \cdots, a_n$ を取り対応して $n+1$ 個の $m\times m$ 行列 $L_\infty, L_1, \cdots, L_n$ を次の条件を満たすように選ぶ。

(i) $e^{2\pi i L_1}\cdots e^{2\pi i L_n} e^{2\pi i L_\infty}=1$

(ii) $\mathrm{trace}\,(L_1+\cdots+L_n+L_\infty)=0$

精密化された意味でのリーマンの問題とは，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の多価解析 $m\times m$ 行列 $Y(y;x;a_1,\cdots,a_n)$ で次の性質を持つものを構成する事である。以下，$y, a_1,\cdots,a_n$ はパラメタと考え簡単に $Y(x)$ と書く。

(iii) $x\neq a_0,\cdots,a_n$ で $Y(x)$ は正則かつ invertible

(iv) $Y(y)=1$.

(v) a_ν $(\nu=1,\cdots,n)$ の近傍では $\det \Phi_\nu(a_\nu)\neq 0$ なる正則行列により $Y(x)=\Phi_\nu(x)(x-a_\nu)^{-L_\nu}$

(vi) ∞ の近傍でも $\det \Phi_\infty(\infty)\neq 0$ なる正則行列により $Y(x)=\Phi_\infty(x)\,x^{L_\infty}$

注意　固有値の整数差の問題（[3]）は考えない。さらに強く，以下では，$L_1,\cdots,L_n$, L_∞ は十分 0 に近い時のみ考える。

$a_1,\cdots,a_n$ が実軸上に $a_1<\cdots<a_n$ の順に並んでいる時には，上記のリーマン問題の解は，オペレーターの真空期待値を使って

$$(1)\quad Y(y;x;a_1,\cdots,a_n)_{jk}=\frac{-2\pi i(y-x)\langle\psi^{(j)}(y)\psi^{*(k)}(x)\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}{\langle\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}$$

の形に書ける。$\psi^{(j)}(y)$, $\psi^{*(k)}(x)$, $\varphi(a_\nu;L_\nu)$ 及び $\langle\ \ \rangle$ の説明は[1]を見られたい。(1) の右辺の分母，分子それぞれは，オペレーターの積公式を使って計算すると無限大の発散を示すが，比は有限で，収束する無限級数表示に書く事もできる。τ 函数と呼んでいるのは $\langle\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle$ の事であって，これ自身は今述べたように発散しているがパラメタ $a_1,\cdots,a_n$ についての外微分を考えると

(2) $$d \log \langle \varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle$$
は収束する表示を持つ。実は，次に述べるように，Schlesinger 方程式の解を使って表わされる。

(1)の函数 Y は，次の Fuchs 型方程式を満たす。

(3) $$dY = \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \, d\log\frac{x-a_\nu}{y-a_\nu}\right) Y$$

ここで A_ν は x に依らない，y と $a_1, \cdots, a_n$ だけの函数からなる $m\times m$ 行列である。(3)の可解条件として次の Schlesinger の方程式を得る。

(4) $$dA_\nu = -\sum_{\mu(\neq\nu)} [A_\nu, A_\mu]\, d\log\frac{a_\nu-a_\mu}{y-a_\mu}$$

定理 1.

$$d\log\langle\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu} \mathrm{trace}\, A_\mu A_\nu \, d\log(a_\mu-a_\nu)$$

注意　trace $A_\mu(y;a)A_\nu(y;a)$ は y に依らない。なぜなら，y を変えても $A_\mu(y;a)$ は一斉に内部自己同型で変換される。また，右辺は，$L_1, \cdots, L_n$ に対応しているような (4)の解に限らず，closed 1-form となる。

定理の右辺の closed 1-form を積分して得られる函数

を $\tau(a_1,\cdots,a_n)$ と書く。τ は定数倍は不定である。

$$(5)\quad d\log\tau(a_1,\cdots,a_n)=\frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{trace}\,A_\mu A_\nu\, d\log(a_\mu-a_\nu)$$

無限遠点 ∞ は特異点でない（$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu=0$）とすると $\tau(a_1,\cdots,a_n)$ は射影変換 $h\in SL(2,\mathbb{C})$ に対して次の変換性を持つ。

定理2. $h=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$ として

$$(6)\quad \frac{\tau(h(a_1),\cdots,h(a_n))}{\tau(a_1,\cdots,a_n)}=\prod_{\mu=1}^{n}(\gamma a_\mu+\delta)^{\mathrm{trace}\,A_\mu^2}$$

注意　$\mathrm{trace}\,A_\mu^2$ は (4)の解に対して定数となる。$L_1,\cdots,L_n$ から来ている場合は $\mathrm{trace}\,L_\mu^2$ に等しい。(6)の両辺は h を変数として多価であり，$h=1$ の近傍からの解析接続として等号が成り立つ。$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\neq 0$ の時も $\gamma=0$ とすれば正しい。

$\tau(a_1,\cdots,a_n)$ は，$a_\mu\neq a_\nu$ で多価解析的であるが，分岐点のいくつかが一致する時は，(4)の方程式の動かぬ特異点に対応しているため，複雑な挙動を示す。しかし，n 個の点が一斉に例えば 0 に近づく時の挙動は定理2から

$$(7)\quad \frac{\tau(ta_1,\cdots,ta_n)}{\tau(a_1,\cdots,a_n)}=t^{-\frac{1}{2}\left(\sum_\mu \mathrm{trace}\,A_\mu^2-\mathrm{trace}\,A_\infty^2\right)}$$

となる。($A_\infty + \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu = 0$) さらに, Briot-Bouqet 型 の特異点を調べる事により, 少なくとも小さな $L_1, \cdots, L_n, L_\infty$ に対応しているような場合には, 次の事が言える。

定理 3.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\langle \varphi(ta_1;L_1)\cdots\varphi(ta_k;L_k)\varphi(a_{k+1};L_{k+1})\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}{\langle \varphi(ta_1;L_1)\cdots\varphi(ta_k;L_k)\rangle}$$

$$= \langle \varphi(0;L')\varphi(a_{k+1};L_{k+1})\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle$$

但し L' は $e^{2\pi i L_1}\cdots e^{2\pi i L_k} = e^{2\pi i L'}$ を満たす 0に近い行列である。

<u>注意</u> ここでは, モノドロミーを保ったまま点を合流させているので, 不確定点は現われない。

[1] Studies on Holonomic Quantum Fields
— 線型微分方程式の変形理論 — 数理研講究録

[2] Holonomic Quantum Fields II. 数理研紀要 (予定)
以上は by Sato, Miwa and Jimbo

[3] Matrix theory ; by Gantmacher , (Chelsea)