

非コンパクト支台を持つ解析汎函数も
解析函数である。

上智大 理工 森本 光生
吉野 邦生

§0. はじめに

この小文の目的は、非コンパクトな支台を持つ解析汎函数に対する種々のコーシー変換について論じ、指数型函数の一意性定理についての Carlson の定理をその応用として証明してみせることにある。

通常の解析汎函数に対するコーシー変換の核は、 $(t-z)^{-1}$ であるが、非コンパクト支台を持つ解析汎函数に対しては、核を修正しなくてはならない。又、修正された核は、 $(t-z)^{-1}$ を主要部として持たなければならない。従来、 $(t-z)^{-1} e^{(t-z)}$, $(t-z)^{-1} e^{-(t-z)^2}$ を用いていた。例えば森本 [3] を参照せよ。ここでは、 $(1 - \exp(z-t))^{-1}$ を "コーシー核" としてえらぶ。この核は、Avanissian-Gay が、($w = e^{-t}$ とおいて) [1] で始めて用いたものである。

§1 では、コンパクトな支台を持つ解析汎函数の理論につ

いて復習し、§2で、非コンパクトな支台（ここでは、半帯領域に支台）をもつ、指数型の解析汎函数を定義し、その性質を述べる。

§3では、 $(1 - \exp(z-t))^{-1}$ を核とする変換、又は、Avanissian-Gay 変換に関する定理を述べる。

§4では、以上の応用として、Carlson の定理を証明する。この小文の結果は、 n 変数の場合に拡張可能である。又、詳しい証明は、森本-吉野[5]に載せてある。

§1. 解析汎函数

L を複素平面上のコンパクト集合とする。 $\mathcal{O}(L)$ で、 L 上の正則函数の芽の全体を表わす。 $\mathcal{O}(L)$ は、DFS-空間になることが知られている。 $\mathcal{O}(L)$ で、 $\mathcal{O}(L)$ の双対空間を表わす。 $\mathcal{O}'(L)$ の元の事を、 L に支台を持つ解析汎函数と言う。 $T \in \mathcal{O}'(L)$ に対し、次の式で、2つの変換を定める。

$$(1.1) \quad \hat{T}(z) = \langle T_z, e^{z\zeta} \rangle$$

$$(1.2) \quad \check{T}(t) = \langle T_z, (t-z)^{-1} \rangle$$

(1.1) を Γ のフーリエ・ポレル変換, (1.2) を Γ のコーシー変換と呼ぶ。 L を、コンパクト凸集合とすると、 $\mathcal{O}'(L)$ のフーリエ・ポレル変換の像が、決まり、次のようになる。

$$(1.3) \quad \text{Exp}(\mathbb{C}; L) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0, \exists C \geq 0, \right. \\ \left. |f(z)| \leq C \cdot \exp(h_L(z) + \varepsilon|z|) \right\}$$

$$h_L(z) = \sup_{z \in L} \text{Re} \langle z, z \rangle$$

又、コーシー変換の像は、次のようになる。

$$(1.4) \quad \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus L) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L) : \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \right\}$$

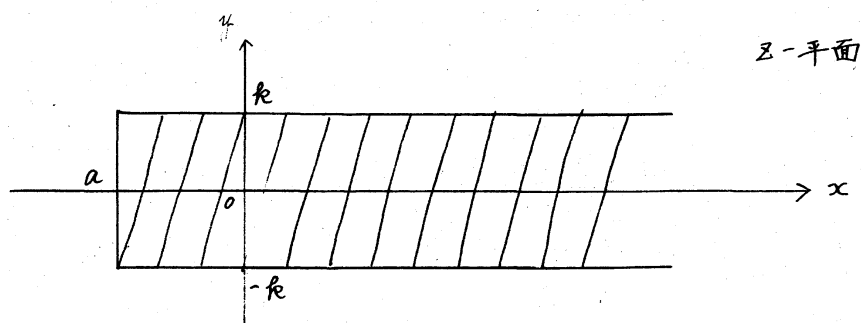
(1.3) 式の証明には、次の図式の可換性が、用いられる。

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}'(L) & \xrightarrow[\text{変換}]{\text{フーリエ・ポレル}} & \text{Exp}(\mathbb{C}; L) \\ & \searrow \text{コーシー変換} & \swarrow \text{フーリエ・ラプラス変換} \\ & \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus L) & \end{array}$$

§2. 非コンパクトな支台を持つ解析汎函数

$$L = [a, \infty) + i[-k, k] \quad -\infty < a < +\infty \quad k \geq 0$$

なる半帯領域を考えよう。(次回参照)



次のように函数空間を設定する。

$$(2.1) \quad Q(L; k') = \lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon' > 0}} \text{ind} Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$$

但し、 $Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$

$$= \left\{ f \in O(L_\varepsilon^\circ) \cap C(L_\varepsilon) : \sup_{z \in L_\varepsilon} |f(z) e^{(k' + \varepsilon')z}| < +\infty \right\}$$

ここで、 L_ε は、 L の ε -近傍を表わし、 L_ε° は、 L_ε の内包を表わす。 $Q(L; k')$ の元の例としては、次のようなものがある。

$$e^{-z^2}, e^{\varepsilon z} (\operatorname{Re} z < -k'), (1 - w e^z)^{-1} (k' < 1, w \in \mathbb{C} \setminus \exp(-L))$$

$Q(L; k')$ には、バナッハ空間 $Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$ の帰納極限の位相を入れる、DFS空間となる。 $Q(L; k')$ の双対空間を $Q'(L; k')$ で表わし、 $Q'(L; k')$ の元を、 L に支台を持つ指数型 k' の解析汎函数と呼ぶ。コンパクト集合 K が、単連結で、 $K \subset L$ とすると、 $O(K) \subset Q'(L; k')$ と考えられる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} a^m \delta'(x-m) \quad (k' > 0) \quad \text{但し、} \langle \delta'(x-m), f \rangle = -f'(m)$$

は、非コンパクトな支台を持つ解析汎函数の例である。

さて、 $T \in Q'(L; k')$ のフーリエ・ポレル変換を次のように定義する。

$$(2.2) \quad \hat{T}(\zeta) = \langle T_z, e^{\zeta z} \rangle$$

この時、次の定理が成立する。

定理1 (森本[3])

$$Q'(L; k') \cong \text{Exp}(\{\zeta \mid \text{Re } \zeta < -k'\} : L)$$

但し、 $\text{Exp}(\{\zeta \mid \text{Re } \zeta < -k'\} : L)$

$$= \left\{ f \in O(\{\zeta \mid \text{Re } \zeta < -k'\}) : \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C \gg 0, \right. \\ \left. |f(\zeta)| \leq C \cdot \exp((a - \varepsilon) \text{Re } \zeta + (k + \varepsilon) |\text{Im } \zeta|) \right\}$$

証明には、(1.5) 図と同様の可換図式を作る。この節の詳しい内容は、森本[4]を見よ。非コンパクトな支台を持つ解析汎函数の空間 $Q'(L; k')$ が、解析函数の空間 $\text{Exp}(\{\zeta \mid \text{Re } \zeta < -k'\} : L)$ と同型であることを強調しよう。

§3. Arvanissian - Gay 変換

この節では、 L の幅は、 2π 未満 (すなわち、 $k < \pi$) と仮定する。

さて、 $T \in Q'(L; k')$ に対し、

$$G_T(w) = \langle T_z, (1 - we^z)^{-1} \rangle$$

とおき、 T の Abelian-Gay 変換と呼ぶ。 $G_T(w)$ は、次の性質をもつ。

$$(i) G_T(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$$

$$(ii) \lim_{|w| \rightarrow \infty} G_T(w) = 0$$

$$(iii) G_T(w) = -\sum \hat{T}(-n) w^{-n} \quad (|w| > e^{-a} \text{で広義一様収束})$$

$$(iv) \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C \gg 0, \text{ such that}$$

$$|G_T(w)| \leq C \cdot |w|^{-k'-\varepsilon'} \quad \text{for } k+\varepsilon \leq |\arg w| \leq \pi$$

$G_T(w)$ の性質をコーシ変換に相当する核 $(1 - \exp(z-t))^{-1}$ を用いた変換で記述すると、(i), (ii), (iii), (iv) はそれぞれ次のようになる。

$$\textcircled{1} G_T(e^{-t}) \in \mathcal{O}_{\text{per}}(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2j\pi i + L))$$

ここで、 \mathcal{O}_{per} は、周期 $2\pi i$ を持つ正則函数の空間を意味する。

$$\textcircled{2} \lim_{\text{Re } t \rightarrow -\infty} G_T(e^{-t}) = 0$$

$$\textcircled{3} G_T(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(-n) e^{-nt} \quad (\text{Re } t < a)$$

$$\textcircled{4} |G_T(e^{-t})| \leq C \cdot e^{-(k'+\varepsilon') \text{Re } t} \quad (k+\varepsilon \leq \text{Im } t \leq \pi)$$

(i), (ii) の性質を持つ函数としては、 $\{z(z-1)\}^{-\frac{1}{2}}$,
 $\{z(z-1)\}^{\frac{1}{2}} P(z)^{-1}$ ($P(0) \neq 0$, $\deg P(z) \geq 2$)

などがある。

広義積分の収束に注意すると、コーシー変換の時と同様に次の反転公式が成り立つ。

$$(3.1) \quad \langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L_\varepsilon} G_T(e^{-z}) h(z) dz$$

但し、 $0 \leq k' < 1$, $T \in Q'(L: k')$, $h \in Q_b(L_\varepsilon: k' + \varepsilon')$ として、先の①②④を満たす函数の全体を、 $\mathcal{O}_{0, \text{per}}(\mathbb{C} \setminus L: k')$ と書くと、次の同型が成り立つ。

定理2 (森本、吉野)

$$Q'(L: k') \cong \mathcal{O}_{0, \text{per}}(L: k')$$

§4. Carlsonの定理

Carlsonの定理は、ポテンシャル散乱論において、散乱振幅の積分表示の一意性を示す時に、使われる。詳しい事は、De Alfaro-Regge [2]を見よ。

定理3 (Carlson) $0 \leq k' < 1$, $0 \leq k < \pi$ とする

$f \in \text{Exp}(L: k')$ であり、かつ $f(-n) = 0$ ($n=1, 2, \dots$) とすると、 $f \equiv 0$

(証明) 定理1により, $f(\zeta) = \hat{T}(\zeta) = \langle T_{\mathbb{Z}}, e^{z\zeta} \rangle$ となる $T \in Q'(L; k')$ が存在する。

(3.1) により,

$$f(\zeta) = \langle T_{\mathbb{Z}}, e^{z\zeta} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L} G_T(e^{-t}) e^{\zeta t} dt$$

$$\text{さて, } G_T(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(-n) e^{-nt} = -\sum_{n=1}^{\infty} f(-n) e^{-nt}$$

であるから, $f(-n) = 0$ なる仮定により, $G_T(e^{-t}) = 0$
故に, $f(\zeta) = 0$ //

参考文献

(1) V. Avaniissian and R. Gay: Sur une transformation des fonctionelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. math. France 103 (1975).

(2) ガルアローレツジエ: ポテンシャル散乱論 講談社

(3) 森本光生: On the Fourier ultra-hyperfunction I

数理解講究録, 192 (1973), 10-34

(4) 森本光生: フーリエ変換と超函数 上智大学講究録
No. 2, (1978)

(5) 森本光生 - 吉野邦生: a. Uniqueness theorem for
holomorphic functions of exponential type,
Hokkaido Math. J. 7 (1978), to appear