数理解析研究所講究録
第325巻 1978年 84-89

Blocks with an abelian defect group

Masao Kiyota
(University of Tokyo)

abstract

Let G be a finite group and let B be a p-block of G with an abelian defect group D. Let b be a p-block of C(D) such that $b^G=B$ (i.e. a root of B), and let T(b) be the inertial group of b in N(D). Then the following Theorems hold.

Theorem A. Let p=2 and suppose that $[D,T(b)]$ is four-group. Then we have $k(B)=|D|$, $l(B)=3$. And every irreducible character in B has height 0.

Theorem B. Let p=3 and suppose that $[D,T(b)]=Z_3$. Then we have $k(B)=|D|$, $l(B)=2$. And every irreducible character in B has height 0.

§1 序文

Gを有限群，Bを defect group Dを持つGの p-block とする．次の問題は modular 表現における基本問題の1つである．

問題　Dの構造が与えられた時，Bの性質とくにBに関する諸定数を求めよ．

ここでBに関する諸定数とは

$k(B) :=$ Bに属する irreducible characters の個数

$l(B) :=$ Bに属する irreducible Brauer characters の個数.

Bの decomposition numbers.

Bの Cartan matrix. 等である.

上の問題の解答として次の結果が知られている.

1°	$\lvert D\rvert = p$ ただし $D \in Syl_p(G)$	Brauer	1942年
2°	$D =$ cyclic	Dade	1966
3°	$p = 2$, $D =$ dihedral	Brauer	1974
4°	$p = 2$, $D =$ generalized quaternion semi-dihedral	Olsson	1975

3°, 4° では Brauer [1] の方法が用いられている. 本文ではこの Brauer の方法を用いて abstract で述べた定理Aを証明する. §4では $D = (2, 2, 2)$ の時の Bの構造を議論する. なお定理Bは定理Aの類似で証明もほとんど同じである.

§2 一般論

Gを有限群, Bを defect group Dを持つGの p-block とする. $DC(D)$の block bは $b^G = B$ となるとき, Bの $DC(D)$における root と呼ばれる. (このとき $D(b) = D$となる.) また

$$T(b) := \{ x \in N(D) \mid b^x = b \}$$

$$e(B) := \lvert T(b) : DC(D) \rvert$$ とおく.

1st Main Th の拡張より $p \nmid e(B)$ となる．$s=(\pi, b_1)$ が (i) $\pi = p$-element of G, (ii) b_1 は $C(\pi)$ の p-block を満たすとき s を subsection という．さらに $b_1^G = B$ のとき B の subsection という．G は subsection 全体の上に共役で作用する．(i.e. $s^g = (\pi^g, b_1^g)$)

以下 B, D, b を固定して上の意味で用いる．定理A の証明のため，Brauer による次の4つの結果を準備する．

定理1 [1] D = abelian とする．D の $T(b)$-共役類の代表系を $\{x_i \mid i=1,\cdots,s\}$ とする．このとき $\{(x_i, b_{x_i}) \mid i=1,\cdots,s\}$ は B の subsection の共役類の代表系をなす．ここで $b_{x_i} = b^{C(x_i)}$．

定理2 [1] $\{(x_i, b_{x_i}) \mid i=1,\cdots,s\}$ を B の subsection の共役類の代表系とする．このとき

$$k(B) = \sum_{i=1}^{s} \ell(b_{x_i})$$ が成り立つ．

定理3 D = abelian, $e(B)=1$ と仮定する．このとき $k(B)=|D|$, $\ell(B)=1$ となる．

命題4 $s=(\pi, b_1)$ を B の subsection で $D(b_1)=D$ なるも

のとする．$\chi \in B$ の高さを h とする．このとき

$\nu(\chi^{(\omega)}(\pi)) = \nu(|C(\pi)|) - d(B) + h$ が成り立つ．

ここで $\chi^{(\omega)}(\pi) = \sum_{\varphi \in b_1} d(\chi, \varphi)\varphi(1)$，$\nu$ は p-進付値

の1つの延長である．

§3 定理Aの証明

§2の結果を用いて定理Aの証明のあらすじを述べる．

1° $|G|$ についての induction を用いる．$|D| = 2^n$ とする．

仮定より $D = [D, T(\ell)] \times C_D(T(\ell))$，$[D, T(\ell)]$ は 4-群

である．D の $T(\ell)$-共役の代表を $\left\{1, x_i, y_j \,\middle|\, \begin{smallmatrix} i=1,\cdots,2^{n-2}-1 \\ j=1,\cdots,2^{n-2} \end{smallmatrix}\right\}$

とする．ただし $x_i \in C_D(T(\ell))$，$y_j \notin C_D(T(\ell))$ である．

定理1より $\left\{(1, B), (x_i, b_{x_i}), (y_j, b_{y_j}) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} i=1,\cdots,2^{n-2}-1 \\ j=1,\cdots,2^{n-2} \end{smallmatrix}\right\}$ が B の

subsection の代表系となる．ここで $b_{x_i} = b^{C(x_i)}$ 等である．

2° $k(B) = l(B) + \sum_i l(b_{x_i}) + \sum_j l(b_{y_j})$　（定理2）

3° $l(b_{y_j}) = 1$　（定理3を用いる．）

4° $l(b_{x_i}) = 3$　（$C(x_i)/\langle x_i \rangle$ に induction を用いる．）

5° $k(B) = l(B) + 2^n - 3 \geq 2^n - 2$

6° $y = y_1$ とおく．$l(b_y) = 1$ より b_y の decomposition numbers の

column は1つ．それを d^y と書く．直交関係により

$(d^y, d^y) = 2^n$．命題4より d^y の成分はいずれも0となり得ない．$5°$ に注意すると d^y の成分はすべて ± 1 となる．

よって $k(B) = d^{\#}$の size $= 2^n$. 5°より $l(B) = 3$.

7° 再び命題4を用いて B の irreducible character の高さ $=$ 0 が分かる。　　（証明終り）

§4　$D = (2, 2, 2)$ の場合.

$D = (2, 2, 2)$ とする. $\mathrm{Aut}\, D = GL(3, 2)$ だから $e(B) = 1, 3, 7, 21$ となる. $e(B) = 1$ のときは定理3より $k(B) = 8$, $l(B) = 1$. $e(B) = 3$ のときは定理Aを用いて, 次の結果が得られる.

命題C [2]　$D = (2, 2, 2)$, $e(B) = 3$ とする. このとき $k(B) = 8$, $l(B) = 3$ となる. B の irreducible characters を $\chi_1, \cdots \chi_8$ とすると $\forall \rho \in G$ odd element に対して $\chi_i(\rho) = \chi_{i+1}(\rho)$　$i = 1, 3, 5, 7$

$\delta\chi_1(\rho) + \lambda\chi_3(\rho) + \mu\chi_5(\rho) + \nu\chi_7(\rho) = 0$

が成り立つ. ここで $\delta, \lambda, \mu, \nu$ は ± 1 である.

さらに適当な basic set に関する B の Cartan matrix は

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる.

$D = (2, 2, 2)$ のときの B の構造は次の表のように予想される. $e(B) = 1, 3$ については上の結果より表の値は正しい.

$e(B)=7$ の場合について，§§2,3の方法で調べてみると表の値以外に $k(B)=5$，$\ell(B)=4$ の可能性も出てくる．今のところこの可能性を消すことができない．$e(B)=21$ の場合も同様である．しかし"B の irred. characters の高さがすべて0"を仮定すると表の値が正しいことが示される．つまり Brauer の予想が正しければ表も正しい．とくに G が solvable なら表の値は正しい．

$e(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$	例
1	8	1	D
3	8	3	$D \rtimes (3)$
7	8	7	$SL(2,8)$
21	8	5	J_1

References

1. R. Brauer, On the structure of blocks of characters in finite groups, Lecture notes in Mathematics. Vol 372 103-31 Springer 1974.
2. 清田正夫，修士論文　東大　1977