

内部部分群をもつ有限群

東工大 理 野村和正

群はすべて有限群とする。群 G の部分群 H が

$$N_G(H) / C_G(H) = \text{Aut}(H)$$

をみたすとき, H を G の 内部部分群 という。

定理 1 全ての部分群が内部部分群であるような群は S_1, S_2, S_3 に限る。

定理 2 全ての可換部分群が内部部分群であるような可解群は, S_1, S_2, S_3, Q_8 に限る。

定理 1 の証明は容易なので略す。全ての可換部分群が内部部分群であるような群を, 以下 AI-群 とよぶ。

つい最近, 宮本雅彦氏(北大理)により, AI-群の可解性が証明された。従って, AI-群は上記のものに限る。

まず AI-群の基本的な性質をまとめておく。証明は簡単なので省略する。

補題 G を AI-群, $p \in \pi(G)$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ とする。

(1) $|Z(P)| = p$.

(2) G の位数 p の元は互に共役。

(3) $N \triangleleft G$, $(|G/N|, |N|) = 1 \implies G/N$ も AI-群

(4) M を P の極大可換正規部分群とすると

$$C_G(M) = T \times M$$

なる p' -群 T があり, T も AI-群になる。

以下, 定理 2 の証明を行う。 S_1, S_2, S_3, Q_8 と異なる可解 AI-群が存在すると仮定し, そのうちで位数最小のものを G とする。 G は可解だから, $m_2(G) = 1$ または $m_2(G) = 2$ のいずれかである。

まず, $m_2(G) = 1$ の場合を考える。 $S \in \text{Syl}_2(G)$ とする。 S は index 2 の巡回部分群 K をもち, $S/K = \text{Aut} K$ だから, $S \cong Z_2$ または $S \cong Q_8$ 。 もし $m_3(G) \geq 2$ とすると, $Z_3 \times Z_3$ を G が involve するが, $\text{Aut}(Z_3 \times Z_3)$ の位数は 2^4 で割れるから否。 よって $m_3(G) = 1$ 。 従って, G の odd Sylow 群はすべて巡回群。 G の最小性と。 補

題(3)により, $F(G)$ は 2-群になる. 同じ理由で, $S \not\subseteq F(G)$. よって $F(G) \cong Z_2$ または Z_4 . G は可解だから, $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. よって $|G/F(G)| \leq 2$, つまり $|G| \leq 8$ となり不合理.

以下 $m_2(G) = 2$ とする.

まず $F(G)$ が偶数位数と仮定する. $S_0 \in \text{Syl}_2(F(G))$, $M = \Omega_1(Z(S_0))$ とおくと, M は G の *involution* をすべて含み, $M \cong Z_2 \times Z_2$. M の位数 3 の自己同型を導く G の元 x をとる. とくに x は 3-*element* にとれる. $N_G(\langle x \rangle)$ は偶数位数だから, $N_M(\langle x \rangle) \neq 1$. $[N_M(\langle x \rangle), x] \leq M \cap \langle x \rangle = 1$ より $C_M(x) \neq 1$. これは, x が M 上で位数 3 であることに反する. 従って $F(G)$ は奇数位数である.

G の最小性と補題(3)より, $F(G)$ は 3-群. $M = \Omega_1(Z(F(G)))$ とおくと, $M \cong Z_3 \times Z_3$. いま $p \in \pi(G)$, $p \geq 5$ なる p があるとすると, 補題(4)により, $M \not\subseteq C_G(P)$, ここで $P \in \text{Syl}_p(G)$. 従って $P \leq \text{Aut}(M)$ となるが, $|\text{Aut} M| = 2^4 \cdot 3$ だから不合理. よって G は $\{2, 3\}$ -群である.

$C_G(M)$ は偶数位数である. なぜなら, もし奇数位数とすると, G の 2-Sylow 群 S は $\text{Aut} M$ の 2-Sylow

群に同型だから $|S| = 2^4$ で、かつ S は位数 8 の元 α を含む。これは $\langle \alpha \rangle$ が内部部分群であることに反する。従って $C_G(M)$ は偶数位数であり、 G のすべての involution を含んでいる。

さて、 $R \in \text{Syl}_3(G)$ とし、 M を含む R の極大可換正規部分群 L をとる。もし $C_G(L) = L$ であるとする、 L の元を invert する G の involution α があるが、 $\alpha \in C_G(M)$ となり不合理。よって $C_G(L) > L$ 。

$C_G(L) = T \times R$ とすると、 $T = Z_2$ または Q_8 である。 T の involution を τ とおく。 $H = C_G(\tau)$ とおくと、 $C_G(L) \leq H$ である。 $\langle \tau \rangle \times L$ は G の内部部分群だから、 $N_H(L)/C_H(L) = \text{Aut } L = N_G(L)/C_G(L)$ 。よって $N_G(L) = N_H(L)$ 。これから $R \leq N_H(L) \leq H$ 。さらに H は G の 2-Sylow 群をも含んでいるから、 G が $\{2, 3\}$ -群であることにより $H = G$ 。つまり $\tau \in Z(G)$ 。従って、 G は唯一つの involution τ をもつことになり、 $m_2(G) = 2$ に反する。証明終。