数理解析研究所講究録
第 328 巻 1978 年 46-54

Newton 境界の位相について.

東大 理　岡 睦雄

0. 1966年、E. Brieskorn がある種の多項式の特異点の近傍境界として、エキゾチック球面を発見して以来、極めて種々の結果が超曲面特異点の位相について得られた。特に Milnor は[5]において、系統的研究を行ない、種々の美しい結果を得た。例えば、「$f(z_1, \cdots, z_{n+1})$ が原点での孤立特異点を持つ仮定の下に、f が原点の近傍で定義する Milnor 束のファイバーは $(n-1)$-連結である」という事を示した。しかしながら孤立しない特異点の位相に関する限り、殆んど皆無に等しい結果しか得られいない。勿論、非孤立特異点の研究の難しさの1つの大きな因子は、「Milnor ファイバーは一般に単連結にすらならない」という事であろう。

最近 Kouchnirenko は[7]において、退化しない Newton 境界を持つ、原点において孤立する特異点を持つ解析函数 $f(z_1, \cdots, z_{n+1})$ の Milnor 数が Newton 境界 $\Gamma(f)$ と原点との錐 $\Gamma_-(f)$ の

Newton 数に等しい事を示した．筆者は以前より非退化の概念の重要性に注目していたが、Kouchnirenko の仕事を起爆として、Newton 境界が非退化の時には、その Milnor 束が $\Gamma(f)$ のみで完全に記述される事を示し、とくに擬斉次多項式の場合には Milnor 束を完全に決定した、以下その概要を説明する．詳細の証明は、[2], [3] を見られたい．

1. 記号及び主定理．

$\mathbb{Z}$：整数あるいは無限巡回群

$\mathbb{N}$：非負整数．

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$z^\nu = z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \cdots z_{n+1}^{\nu_{n+1}}$, $|\nu| = \sum_{i=1}^{n+1} |\nu_i|$ $\quad (z \in \mathbb{C}^{n+1}; \nu \in \mathbb{N}^{n+1})$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^I = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_j = 0 \quad (j \notin I) \} \\ \mathbb{C}^I = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1};\ z_j = 0 \quad (j \notin I) \} \end{array}\right\} \quad I \subset \{1, 2, \cdots, n+1\}.$$

m-volume P：m 次元体積（P は $\mathbb{R}^m$ の多面体）

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

$f(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\nu z^\nu$ を擬斉次多項式で $(a_1, \cdots, a_{n+1}; d)$ をその重さの型とする．則ち、$f(z_1^{a_1}, \cdots, z_{n+1}^{a_{n+1}})$ は d 次斉次多項式と成るし，$\{a_i\}$ は正整数で，最大公約数 G.C.M$(a_1, \cdots, a_{n+1}) = 1$．$\Delta$ を $\{\nu;\ c_\nu \neq 0\}$ で張られる凸な多面体とし，$\Delta(0)$ を Δ と原点の錐であるとする。f の Milnor 束

$f: \mathbb{C}^{n+1} - f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 及びその自然な制限 $f^*: (\mathbb{C}^*)^{n+1} - f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を考え、F, F^* をその各ファイバーとする。ρ を $F^* \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ で定義される自然な写像、$h: F \longrightarrow F$ ($h^*: F^* \longrightarrow F^*$) を $z \longmapsto (z_1 \exp \frac{a_1}{d} 2\pi\sqrt{-1}, \cdots, z_{n+1} \exp \frac{a_{n+1}}{d} 2\pi\sqrt{-1})$ で定義される monodromy 写像とする。以下 $f(z)$ は非退化と仮定する。i.e. 任意の面 $\Xi \subset \Delta$ に関して、$\frac{\partial f_\Xi}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial f_\Xi}{\partial z_{n+1}} = 0$ は $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ に解を持たない。ただし $f_\Xi(z) = \sum_{\nu \in \Xi} c_\nu z^\nu$。その時

定理(1.1) $\dim \Delta = n$ とする。その時次が成立つ。

(i) $\chi(F^*) = (-1)^n (n+1)!\ (n+1)\text{-volume}\ \Delta(0)$.

(ii) ρ は n-同値写像. i.e. $\rho_\#: \pi_1(F^*) \longrightarrow \pi_1((\mathbb{C}^*)^{n+1})$ は同型で、$\pi_j(F^*) = 0 \quad (1 < j < n)$.

F^* は n 次元 CW-complex のホモトピー型を持つので、この定理で完全にホモトピー的に記述される。

系(1.1.1) (i) $(h^*)_*: H_j(F^*; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_j(F^*; \mathbb{Z})$ は恒等写像 $(0 \leqq j < n)$ になり、(ii) h^* のゼータ函数 $\zeta(h^*; t)$ は $(1 - t^d)^{-\frac{\chi(F^*)}{d}}$ で与えられる。

$\dim \Delta < n$ の時も上の定理で完全に記述される。則ち、$r = \dim \Delta$ とすれば、

系(1.1.2). 適当な $(r+1)$ 変数の擬斉次多項式で定理(1.1)の仮定を満たすもの $g(z_1, \cdots, z_{r+1})$ が存在して、F^* は $G^* \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ と微分同型。ただし、$G^* \subset (\mathbb{C}^*)^{r+1}$ は g に対応するファイバー。

2. 持ち上げ原理, 射影原理.

以下 $f(z)$, F^* 等 §1 と同じとする. 今 $GL(n+1;\mathbb{Z})$ から行列 $N=(b^1,\cdots,b^{n+1})$ を取り、$\varphi_N:(\mathbb{C}^*)^{n+1}\longrightarrow(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ を $z\longmapsto(z^{b^1},\cdots,z^{b^{n+1}})$ で定義しよう. φ_N が $|\det N|$ 枚の被覆写像になる事は明白であろう. $f_N(z)$ を $f(\varphi_N(z))$ で定義すれば、f_N はやはり擬斉次多項式で, 定理(1.1)の仮定を満す。(重さは負になるかもしれない。) この時.

<u>補題(2.1).</u> <u>定理(1.1)の主張は $f(z)$ と $f_N(z)$ に対するいずれか一方について成立すれば他方についても成立する</u>.

基本群に対する主張のみが明らかではないが、証明は難しくない.([3]参照)

これに依って以下我々は $f(z)$ は斉次多項式で次数 d と仮定できる. その時、$V=\{[z]\in\mathbb{P}^n;\ f(z)=0\}$, $L_j=\{[z]\in\mathbb{P}^n;\ z_j=0\}$ とし, $Y^*=\mathbb{P}^n-V\cup L_1\cup\cdots\cup L_{n+1}$ とする. この場合、h^* は F^* 上の自由 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 作用を引き起す。又その商空間は明らかに Y^* となる。従って、

<u>補題(2.2).</u> (i) $\chi(Y^*)=\chi(F^*)/d$

(ii) $\pi_1(Y^*)$: <u>自由アーベル群, 階数 $n+1$</u> $\Longleftrightarrow$ $\pi_1(F^*)$: <u>自由アーベル群, 階数 n</u>.

(iii) $\pi_i(Y^*)\cong\pi_i(F^*)$ $\quad(1<i<n)$.

やはり(ii)のみが明白でないが, これは Alexander 双対定理

及び Lefschetz 双対定理を使って証明される。([3])

3. 全域的非退化多項式

$g(u)=\sum_{j=1}^{m} b_j u^{\mu^j}$ を n 変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の(ローラン)多項式とする。g の台 $S(g)$ を $b_j \neq 0$ なる μ^j の張る凸なコンパクトな多面体として定義する。g が大局的に非退化とは、任意の辺 $\Xi \in S(g)$ に対して、方程式 $g_\Xi(u)=\frac{\partial g_\Xi}{\partial u_1}(u)=\cdots=\frac{\partial g_\Xi}{\partial u_n}(u)=0$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ の中に解を持たない時をいう。今 $f(z)$ を $z=(z_1, \cdots, z_{n+1})$ の d 次斉次多項式とする時、$\pi f(u)$ を $f(u_1, \cdots, u_n, 1)$ で定義する。定義より明らかに

補題(3.1) 1. $f(z)$ が Newton 境界のいみで非退化 $\Leftrightarrow$ $\pi f(u)$ が大局的に非退化。 2. $n!$ n-volume $S(\pi f)=(n+1)!(n+1)$-volume $\Delta(0)$.

補題(2.2) 及び補題(3.1) より、定理(1.1) は次と同値。

定理(3.2). $g(u)$ を大局的非退化な多項式とする。その時、

1. $\chi((\mathbb{C}^*)^n-g^{-1}(0))=(-1)^n\, n!\ n\text{-dim volume } S(g)$.
2. 更に、$\dim S(g)=n$ とすれば、$(\mathbb{C}^*)^n-g^{-1}(0)$ の基本群は階数 $n+1$ の自由アーベル群で、その普遍被覆空間は $(n-1)$ 連結となる。

我々は以下に定理(3.2) の帰納的証明の方針をのべよう。$S(g)$ の頂点 ν が効果的であるとは、$S(g)$ の ν 以外の格子点の張る凸多面体が真に $S(g)$ より小さくなる時をいう。証明に

は効果的頂点の数に対する帰納法を用いる。一般的議論で、$\mu^1, \cdots, \mu^m$ は全て効果的と仮定できる。$m = n+1$ の時。この場合は実は [4] の結果に帰着される。$m > n+1$ の時、必要があれば適当な Affine 変換 $g \longrightarrow g_A$ を行えば、次のような vertex μ^m が見つけだせる。ただし A は $\mathbb{Z}$ 上定義された affine 変換で、$g_A(u)=\sum_{j=1}^{m} b_j u^{\nu_j}$, $\nu_j = A\mu_j$。

(1) $S(g)$ の任意の辺 Ξ の張る線形な最小の空間は $\Xi = S(g)$ の時以外原点を通らない。

(2) 今 $g_t(u) = \sum_{j=1}^{m-1} b_j u^{\mu_j} + t\cdot b_m u^{\mu_m}$ で定義すれば、$0\leq t\leq 1$ のとき $g_t(u)$ は大局的非退化で、$\Gamma_-(g_1) < \Gamma_-(g_0)$ すなわち $S(g)$ は次の図の如くなっている。

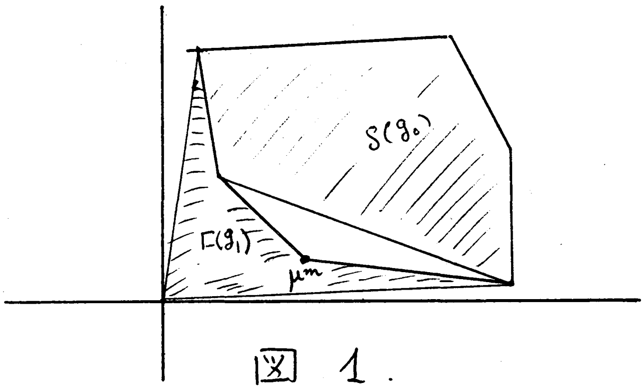


図 1.

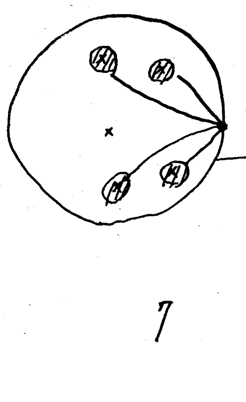
次の補題が最も重要である。

Lemma (3.3) 係数 $\{b_j\}$ を上手に選べば、小さな t について、(i) g_t は丁度 $n!$ n-volume $S(g_1)$ 個の単純臨界点を $(\mathbb{C}^*)^n$ にもつ $(t\neq 0)$。$t=0$ については丁度 $n!$ n-volume $S(g_0)$ コの単純臨界点を $(\mathbb{C}^*)^n$ にもつ。又それらの臨界値は零でない。(ii) $t \to 0$ の時、

g_tの臨界点のうち $n!\,n$-volume $S(g_0)$ コは g_0の臨界点に近づき、残りは原点に収束する。

Lemma (3.4) 超曲面の族 $\{g_t^{-1}(\eta)\}$ $(0\le t\le 1)$ $(\eta\in\mathbb{C}^*)$ は次の意味で一様に、原点中心の球面族 $S_R=\{u\in\mathbb{C}^n;\ \|u\|=R\}$ でコントロールされる。$\forall\varepsilon>0$ に対して、$\exists R_0>0$, $\forall\eta$ $(\varepsilon<|\eta|<\varepsilon^{-1})$ と $\forall R$, $R\ge R_0$ に対して超曲面 $g_t^{-1}(\eta)$ と S_R は $(\mathbb{C}^*)^n$ で横断的に交わる。

今簡単の為 $S(g_1)$ は $\{x_i\ge 1;\ i=1,\cdots,n\}$ に含まれると仮定しよう。上の補題(3.4)は $g_t:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ が、特異ファイバーを除けば、local 自明ファイバー束となることを導く。η_0 を g_0 のすべての零でない臨界値の絶対値より小さく固定する。t_0 を十分小さくとれば、$0<\forall t\le t_0$ に対して、g_t の臨界値は、$D^c_{\eta_0}=\{\eta\in\mathbb{C};\ |\eta|\gneq\eta_0\}$ に $n!\,n$-volume $S(g_0)$ コ、$\mathring{D}_{\eta_0}=\{\eta\in\mathbb{C};\ |\eta|<\eta_0\}$ に $n!(n\text{-volume}\,S(g_1)-n\text{-volume}\,S(g_0))$ コある。今 $Y_{\eta_0}(t)$ を $g_t^{-1}(\overline{D^c_{\eta_0}})$ とすると、仮定と上の補題に依って $Y_{\eta_0}(0)$ と $Y_{\eta_0}(t_0)$ は diffeo である。一方 $Y_{\eta_0}(0)$ は明らかに $(\mathbb{C}^*)^n-g_0^{-1}(0)=\mathbb{C}^n-g_0^{-1}(0)$ のデフォーメイションリトラクトである。今 D_{η_0} に入る g_{t_0} の臨界点に次の様な path をとる



$|\eta|=\eta_0$

Γを ∂D_{η_0} と先に小さな disk をくっつけた図形とする。Γは $\overline{D_{\eta_0}} - \{0\}$ の deformation retract と思ってよい。一方1つの枝  を ∂D_{η_0} につけることは $g_t^{-1}(\partial D_{\eta_0} \cup$ —◎$)$ において、$g_t^{-1}(\partial D_{\eta_0})$ に対応する臨界点での消滅球 S^{n-1} の錐を取ることに対応する。すなわち、$(\mathbb{C}^*)^n - g_t^{-1}(c) \simeq g_{t_0}^{-1}(\Gamma) \cup Y_{\eta_0}(t_0)$ でそれは $Y_{\eta_0}(t_0)$ に $n!(n\text{-volume } S(g_1) - n\text{-volume } S(g_0))$ コの n-cells を消滅サイクルにはりつけて得られる。従って、

$\chi(\mathbb{C}^{*n} - g_{t_0}^{-1}(0)) = \chi(\mathbb{C}^{*n} - g_0^{-1}(0)) + (-1)^n n!\{n\text{-volume } S(g_1) - n\text{-volume } S(g_0)\}$ で、$\pi_j(\mathbb{C}^{*n} - g_0^{-1}(0)) \longrightarrow \pi_j(\mathbb{C}^{*n} - g_{t_0}^{-1}(0))$ は $j \leqq n-2$ で同型、$j = n-1$ で onto となり帰納法になる。詳しい証明は [3] を見よ。

§4. F の topology.

いままで F^* の topology のみをしらべてきたが定理(1.1)の系として得られる F の位相的性質をのべよう。$I \subset \{1, \dots, n+1\}$ に対して、F_I^* を $f_I^{-1}(1) \cap (\mathbb{C}^*)^I$ ($f_I = f|\mathbb{C}^I$; $\mathbb{C}^I = \{z \mid z_j = 0,\ j \notin I\}$) として、$d_I$ を f_I の対応する重さとする。以下 f は Th.(1.1) の仮定をみたすものとする。

定理(4.1). (i) $\chi(F) = (-1)^n \nu(\Delta(0)) + 1$. ($\nu(\Delta(0))$ は $\Delta(0)$ の Newton 数.)

(ii) $\zeta(h\,;\,t) = \prod_{I \neq \phi} (1 - t^{d_I})^{-\chi(F_I^*)/d_I}$

$\Delta_{i_1\cdots i_k}$ を $\Delta \cap \{x_j = 0\ ;\ j = i_1, i_2, \dots, i_k\}$ で定義すれば、
Fの連結性の条件として、

定理.(4.2) (i) F：単連結 $\Longleftrightarrow$ $\Delta_i \neq \phi$ $(i = 1, \dots, n+1)$

(ii) $\exists\, s \in \mathbb{N}$, $\dim \Delta_{i_1 \cdots i_k} > s - 2k$ が全ての $i_1, \dots, i_k$ で成立すれば、F は s-連結である。

References

[1] Kouchnirenko,A.G. Polyedre de Newton et nombres de Milnor, Invent. math. 32 (1976), 1- 31.

[2] Oka, M. On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary. (to appear)

[3] Oka, M.On the topology of the Newton boundary II, (to appear)

[4] Oka,M. On the topology of the complement of a hypersurface in P^n, Quart. J. math. Oxford (2), 28 (1977), 229-242.

[5] Milnor, J. Singular points of complex hypersurface, Annals of math. Studies 61,Princeton Univ. press. 1968.