数理解析研究所講究録
第 328 巻 1978 年 88-95

特異点の変形とVII型曲面

北大 教養 中村 郁

Sを2次元のコンパクト複素多様体とする。以下曲面と呼ぶ。曲面の分類は Enriques. Castelnuvo 等のイタリヤ学派, 小平邦彦等によって進められ そのかなり精密な分類が得られた。小平の分類によれば 曲面は7つの類I～VIIに分かれる。ここで扱うVII型曲面は $b_1=1$ で定義される. VII型曲面の典型的なものに Hopf曲面があるが それは次の様に定義される

α, βを複素数, $|\alpha|, |\beta|>1$ を満たすものとする. $\mathbb{C}^2$の自己同型写像 g:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \cup & & \cup \\ (z_1, z_2) & \rightarrow & (\alpha z_1, \beta z_2) \end{array}$$

は $\mathbb{C}^2-\{0\}$ の自己同型を引起し. $\{g^n, n\in\mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}^2-\{0\}$ に固有不連続に作用し. 固定点を持たない. 又コンパクトな基本領域を持つ 従って商空間 $S=\mathbb{C}^2-\{0\}/g^{\mathbb{Z}}$ $g^{\mathbb{Z}}=\{g^n, n\in\mathbb{Z}\}$ はコンパクトな複素多様体となるが Sは位相的には $S^1\times S^3$ と同型 従って $b_1=1$, 従って特にVII型曲面である。

$C_\nu: z_\nu=0$ $(\nu=1.2)$ は $g^{\mathbb{Z}}$ 不変なので S上の曲線を与える.（C_νで表わす). C_νは非特異楕円曲線で C_νの定め

る線束$[C_\nu]$ $(=F_\nu)$ は平坦，即ち $F_\nu \in H^1(S, \mathbb{C}^*)$．　dz_ν は $H^0(S, \Omega^1(F_\nu))$ の切断を定める．

この最後の事実に関連して井上は次の定理を証明した

定理1（井上，Inventiones 1974）

$b_1=1$, $b_2=0$, S上には曲線がない，

$\exists$ 平坦な線束F s.t. $H^0(S, \Omega^1(F)) \neq 0$

$\Rightarrow$ $S \cong S_M$，又は $S^{(\pm)}_{Npqrt}$

但し S_M, $S^{(\pm)}_{Npqrt}$ は同じ論文の中で井上の構成した新しいVII型曲面である。ここで定理1の仮定の中で"曲線が存在しない"は次の定理から当然の仮定である。

定理2（小平）

$b_1=1$, $b_2=0$, 曲線がある $\Rightarrow$ SはHopf曲面か或る種の楕円曲面（その構造は完全に記述される。）

ところで最近更にBogomolovによって次の結果が得られた。然し証明は難解で正しいかどうかは未だ分からない．

定理3(?)（Bogomolov）

$b_1=1$, $b_2=0$, 曲線がない $\Rightarrow$ $\exists$ 平坦な線束F s.t. $H^0(S, \Omega^1(F)) \neq 0$

そこで $b_2>0$ の場合が問題になるが　この場合もまた井上が新しい例を構成した　２種類あって　ここでは Vancouver の国際会議で発表されたものを S_1，実２次数 ω に対して構成されたものを S_ω で表わす　各々基本群は $\mathbb{Z}$ と同型で，従って n 次の不分岐被覆が一意的に定められる　それを $S_1^{[n]}$，$S_\omega^{[n]}$ 等によって表わすことにする。又　特別な ω に対しては　S_ω 更に位数２の自己同型 ι によって商空間 $\hat{S}_\omega=S_\omega/\iota$　が構成される．$\pi_1(\hat{S}_\omega)=\mathbb{Z}$ となっている。S_1 上には　通常２重点を１つ持つ有理曲線と非特異楕円曲線．S_ω 上には有理曲線の輪が２つ，$\hat{S}_\omega$ 上には有理曲線の輪が１つ　あって　その他には曲線は存在しない。

ところで

__定理__[4]（小平）　次の様な族 $\pi: Y\to D$　が存在する。

$Y_0=\pi^{-1}(0)$：Hirzebruch 曲面 Σ_n の２つの切断 C_0，C_∞（$C_0^2=n$, $C_\infty^2=-n$）を同一視したもの

$Y_t=\pi^{-1}(t)$ $(t\neq 0)$：Hopf 曲面

（但し Y は３次元複素多様体，D は１次元の半径小の円板）

__定理__[5]（小田）　$\pi: Y\to D$　　Y は正規な３次元解析空間で　$\pi^{-1}(0)$ は有理曲面で重複曲線を持つもの，$\pi^{-1}(t)$ $(t\neq 0)$ は S_1，又は S_ω，　なるものが存在する。

実は一般に

<u>補題6</u> X: 有理曲面　C_ν: X上の曲線 $(\nu=1,2)$

s.t. $C_1C_2=0,\ C_1^2=+1,\ C_2^2=-1$　が与えられると

$\exists\pi: Y\to D$ s.t. $\pi^{-1}(0)=X$ の C_1 と C_2 を同一視したもの

(C_1 と C_2 を同一視して生ずる特異点は (x,y,z), $xy=0$ の型のものとする.)　$\pi^{-1}(t)$: 非特異曲面.

また更にこの時 $\pi^{-1}(t)$ は VII型。

ところで S: Hopf曲面とすると

S_δ: $\delta_1<|z_1|^2+|z_2|^2<\delta_2$　とすれば　適当な δ_1,δ_2 に対しては $g^n(S_\delta)\cap S_\delta=\phi$ $(n\neq 0)$, 従って $S_\delta\subset S$ と見做せる. 更に $S-S_\delta$ は連結. この様な S_δ は(即ち $S-S_\delta$ が連結) global spherical shell と呼ぶことにする (この概念は加藤昌英による)以下 G.S.S. と略記する。

<u>定理7</u>

(1) 補題5の $Y_t=\pi^{-1}(t)$ $(t\neq0)$ は G.S.S を含む

(2) 逆に G.S.S を含む任意の S に対して, $\exists\pi: Y\to D$

s.t. $Y_0=\pi^{-1}(0)$: 補題5の如し. $Y_t=\pi^{-1}(t)$: 非特異

$Y_{t_0}\cong S$

従って特に G.S.S を含む曲面 S は VII型

<u>定理8</u>(加藤) S_1 と S_ω は G.S.S を含む.

定理9 SはGSSを含むと仮定する

更に(1) 2つの有理曲線の輪を持てば $S \cong S_{\omega}^{[n]}$

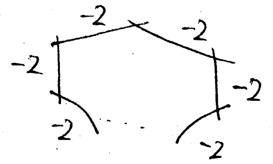
(2) 1つの楕円曲線と1つの有理曲線の輪を持てば

$S \cong S_{1}^{[n]}$

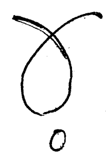
(3) 2つの楕円曲線を持てば Hopf曲面

(4) 唯1つの枝のない有理曲線の輪 でその交点行列が負定値の時は $S \cong S_{\omega}^{[n]}$ (nは奇数)

注意) (4)に於て、交点行列が負定値でなければ、その輪は必然的に

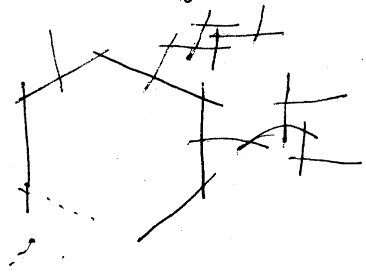


か又は

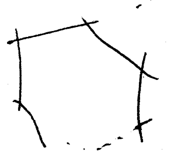


に限る(数字は自交点数) 一般にGSS Sを含む曲面上には b_2個の有理曲線を持ち $S_{\omega}^{[n]}$, $S_{1}^{[n]}$, Hopf曲面を除けば S上の曲線はそれらで全て尽され、その台は連結である(加藤) その台は一般に輪から数本の枝が出た形をしている。(Fig.) (4)の枝のない輪というのは

Fig.



はこの中で



の形をしているものを指す。

定理9は次のやや一般な定理10, 及び定理9の特殊な場合

である定理11, 12を証明することによって得られる。

<u>定理10.</u> SはVII型, 定数以外の有理型函数は持たないものとする。更に仮定: ある曲線 D と平坦な線束(自明でない) F_1, F_2 $(F_1 \neq F_2)$ が存在して次を満たす

(10.1) $\dim H^1(\mathcal{O}_D) = 2$

(10.2) $H^0(\Omega^1(\log D)(F_\nu)) \neq 0$

(10.3) $H^0(\Omega^1(\log D)) = 0$

(10.4) D の任意の連結成分 D' に対して, $\pi_1(S - D') \cong \mathbb{Z}$

この時 $S \cong S_\omega^{[n]}$

注意) 定数以外の有理型函数が存在すると, S は $\mathbb{P}_1$ 上の楕円曲面 $(b_1=1)$ と同型, その構造は完全に分かっている。

定理10に関連して Hopf曲面を見直すと $S = \mathbb{C}^2 - \{0\}/g\mathbb{Z}$ 上には $\omega_1 = \frac{dz_1}{z_1}$, $\omega_2 = \frac{dz_2}{z_2}$, $\omega_\nu \in H^0(\Omega^1(\log D))$ $D = C_1 + C_2$

$$H^1(\mathcal{O}_D) \cong H^1(\mathcal{O}_{C_1}) \oplus H^1(\mathcal{O}_{C_2}) = \mathbb{C}^2$$

定理10の(10.1), (10.2) が少し形を変えて成立していると見ることができる. 実際この場合には次の定理が成立つ.

<u>定理</u> S VII型, $\exists D$ 曲線 s.t. $\dim H^1(\mathcal{O}_D) = 2$, $\dim H^0(\Omega^1(\log D)) = 2$ $\Rightarrow$ S: Hopf曲面

定理9の特別な場合として $\mathbb{R}^2$のある種の分割 Δ とそれに作用する整係数アフィン変換 g に対して 補題6の様な族 Y が

torus embedding を用いて構成される。(これは定理5で示された小田の方法の一般化である) g の線型部分を $\mathrm{Lin}\,g$, そのトレースを $\mathrm{Tr}\,g$ で表わすことにすると,

定理11 $\det \mathrm{Lin}\,g = 1$ の時, いつも $\mathrm{Tr}\,g \geq 2$ が成立,

$\mathrm{Tr}\,g = 2$ とすると $\mathrm{Lin}\,g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_t$: Hopf

$\mathrm{Lin}\,g \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (共役) $\Rightarrow Y_t \cong S_1^{[n]}$

$* \neq 0$

$\mathrm{Tr}\,g > 2$ とすると $Y_t \cong S_\omega^{[n]}$ 但し ω は $\mathrm{Lin}\,g$ の固有値

定理12 $\det \mathrm{Lin}\,g = -1$ の時

$\mathrm{Tr}\,g = 0 \Rightarrow Y_t$: Hopf

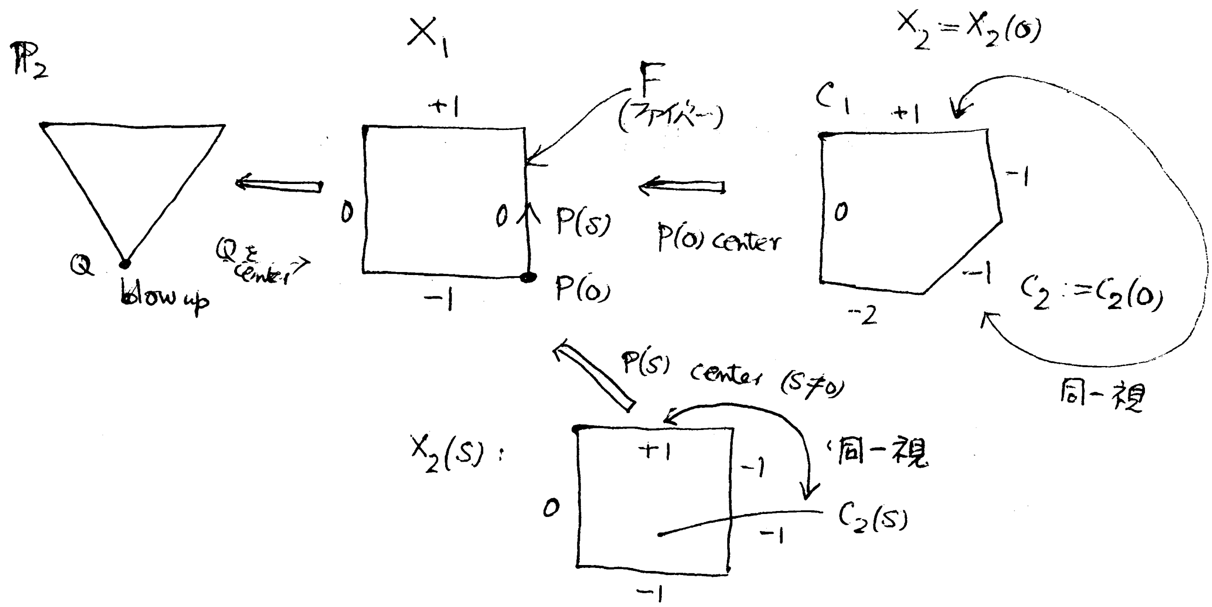
$\mathrm{Tr}\,g \neq 0 \Rightarrow Y_t \cong \hat{S}_\omega^{[n]}$ (n: 奇数) 但 ω は $(\mathrm{Lin}\,g)^2$ の固有値

注意) $\hat{S}_\omega^{[n]}$ (n: 偶数) $\cong S_\omega^{[\frac{n}{2}]}$

定理13 (加藤)

S : G.S.S. とすれば S の微小変形 S_t で Hopf 曲面から有限回のモノイダル変換で得られるものがある。

この定理は $\left\{\begin{matrix}\text{補題 6}\\ \text{定理 7}\end{matrix}\right\}$ の考え方を用いて 次の様にも証明できる。本質的には同じ議論なので,例で見よう.



定理7の X として X_2 をとると C_1 と C_2 を適当に同一視した時 Y_t $(t\neq 0)$ は S_1 と同型になる。$X_2=X_2^{(0)}$は $X_1=\Sigma_1$ (Hirzebruch 曲面) ファイバー F に沿って blow up の center $P(s)$ を平行移動することにより $X_2(s)$ $|s|<\varepsilon$ に変形される。この時 適当に C_1 と $C_2(s)$ $(=Q_{P(s)}(P(s)))$ を同一視して $\mathcal{Y}_0=\bigcup_{|s|<\varepsilon} X_2(s)/_{C_1=C_2(s)}$ という特異曲面の族を構成する。更にこの時

$\pi: \tilde{Y}\longrightarrow D\times D$ 平坦な族 s.t. $\tilde{Y}|_{0\times D}=\mathcal{Y}_0$, $\tilde{Y}|_{D\times 0}=Y$

なるものが構成される。$\tilde{Y}|_{D\times s}$ $(s\neq 0)$ は $X_2(s)/_{C_1=C_2(s)}$ を原点上のファイバーとする族になるが、容易に分かる様に $X_2(s)/_{C_1=C_2(s)}$ は (適当に座標を変換して) Σ_1 の2つの切断 C_0 C_∞ $C_0^2=+1$, $C_\infty^2=-1$ を同一視し C_0, C_∞ 上にない点で1回モノイダル変換したものに他ならない。従って定理3 (に関連した結果)より、$\tilde{Y}_{t\times s}$ はHopf曲面の1回モノイダル変換と同型 S_1 (証終) —8—

$\tilde{Y}|_{D\times D}$ は通常の変形族なので $\tilde{Y}_{t\times s}$ は $\tilde{Y}_{t\times 0}$ の変形