数理解析研究所講究録
第 329 巻 1978 年 113-120

非線型応答問題におけるいくつかの積分公式の安定性

熊大 理学部　　三好哲彦

1. 序　非線型振動のなかでもとくに弾ー塑性振動を表わす微分方程式や，その数値解法にかんする数学理論はまだほとんど確立されていず，多くの問題が残されている。この種の問題にせまる手がかりとして，ここでは，双1次型の復元力特性をもつ多質点系の弾ー塑性振動を考え，この運動を表現する微分方程式の新しい定式化と，これを差分近似して解くさいの数値的安定性について議論する。

2. 1質点系の弾ー塑性振動　簡単化のため，初期変位＝0，初速度＞0と仮定

［定義］　弾性↔塑性の変化時の変位に初めから順に番号をつけ，それらを $u^{(j)}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ とする。$u^{(0)}$ は初期降伏変位である。この質点系が state (m) にあるとは，現時点までにおける弾性↔塑性の最後の変化が $u^{(m)}$ であるときをいう。

考えている質点系がいま state (m) にあるとし，振動の方程式を

(1) $$\rho \ddot{u} + f(u) = 0$$

と表わすとして，復元力 $f(u)$ をつぎのように仮定する． k および α をそれぞれバネ定数，塑性傾斜率とする $(0 < \alpha \leq 1)$.

$f(u)$ は u の連続関数であって

(イ) state (m) が elastic であれば $\dot{f}(u) = k\dot{u}$

(ロ) state (m) が plastic であれば $\dot{f}(u) = (1-\alpha)k\dot{u}$

[注意]：方程式(1)のような簡単な場合でも"elastic" および "plastic" をどう定義するかはさほど自明ではない．とくに(1)の右辺にゼロでない函数が与えられているときがそうである．この問題はしかし多質点系の場合も含めて解決できる．詳しくは [2] をみられたい．

3. 1質点系にたいするエネルギー則　復元力 $f(u)$ は状態によって表現式が異るので統一的な取り扱いには不便であるが，次のような単一式では表現できる．

定理 1.　state (m) における振動の方程式 (1) は次のような単一式で表わされる．

(2) $$\rho \ddot{u} + ku - \alpha k \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j} (u - u^{(j)}) = 0$$

この表現式を使うとエネルギー(非)保存則が簡単に表わされる.

<u>定理2.</u>　E_0 を初期エネルギーとし,

$$(3)\qquad E_m(t)=\frac{\rho}{2}(\dot{u})^2+\frac{k}{2}u^2-\frac{\alpha k}{2}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j(u-u^{(j)})^2$$

とおけば $state(m)$ において $E_m(t)=E_0$ が成立する。

<u>系3.</u>　(1)式で表わされる弾-塑性振動は弾性振動へ収束する。

<u>4.　多質点系の弾-塑性振動</u>　1質点系にたいする上述の議論,結論は多質点系にたいしてもほとんど同じ形で可能である.　考えている系の i 番目の層が $state(m_i)$ にあるということを1質点系のときと同様に定義する。　そしてこの質点系が $state(m)$　$(m=(m_1,m_2,\cdots,m_N))$ にあるとは,i 番目の層が $state(m_i)$ にあるときをいうものとする。

$U_i=u_i-u_{i-1}$　$(i=1\sim N)$,　$u_0\equiv 0$

ρ_i : i 層の質量,　k_i : i 層の弾性剛性

α_i : i 層の塑性傾斜率.

とし,　この系の運動方程式をつぎのように表わす.

(4) $$\rho_i \ddot{u}_i + f_i(v_i) - f_{i+1}(v_{i+1}) = 0 \qquad (i = 1 \sim N)$$

ここに $f_i(v_i)$ は v_i の連続関数であって

(1) state(m_i) が elastic であれば $\dot{f}_i(v_i) = k_i \dot{v}_i$

(2) state(m_i) が plastic であれば $\dot{f}_i(v_i) = (1-\alpha_i) k_i \dot{v}_i$

である。ただし，$k_{N+1} = 0$ とする。

<u>定理 3.</u> state(m) において (4) は次のように表現される。

$$\rho_i \ddot{u}_i + \left[k_i v_i - \alpha_i k_i \sum_{j=0}^{m_i} (-1)^j (v_i - v_i^{(j)}) \right] - \left[k_{i+1} v_{i+1} - \alpha_{i+1} k_{i+1} \sum_{j=0}^{m_{i+1}} (-1)^j (v_{i+1} - v_{i+1}^{(j)}) \right]$$

ここに，$v_i^{(j)}$ は i 層が state(j) に入るときの v_i の値である。

<u>定理 4.</u> E_0 を初期エネルギーとし，

$$E_m(t) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\rho_i}{2} (\dot{u}_i)^2 + \frac{k_i}{2} v_i^2 - \frac{\alpha_i k_i}{2} \sum_{j=0}^{m_i} (-1)^j (v_i - v_i^{(j)})^2 \right]$$

とおけば state(m) において $E_m(t) = E_0$ が成立する。

<u>系 5</u> (4)式で表わされる弾－塑性振動は弾性振動へ収束す

る。

〔注意〕： 各層の弾－塑性の定義には次の事実が本質的な役割を演じよう。

定理 6. $t=t_0$ のとき，$i=i_1, i_2, \cdots, i_r$ にたいし，i 層の復元力特性を表わす平面上において，点 $(v_i, f_i(v_i))$ が直線

$$f_i(v_i)=k_i v_i-\alpha_i k_i(v_i \mp v_i^{(0)})$$

の上にあり，しかもこのとき $\dot{v}_i=\ddot{v}_i=0$ だとする。

$t=t_0+0$ における v_i のゼロでない最低次の導関数の値は $t>t_0$ において $f_i(v_i)$ を弾性とおくか塑性とおくかには関係せずに確定する。

5. 近似解の数値的安定性（一質点系の場合） 加速度を2階中心差分で近似する。

(5) $$\rho D_+D_-u_n+f(u_n)=0$$

弾－塑性の判定は次の基準で行う。

(イ) 初期降伏は $u_{n-1}\leq u^{(s)}<u_n$ がみたされたときとし，n－step より塑性とする。その他の場合も同じ。

(ロ) 塑性→弾性 $D_+u_{n-1}\geq 0$ (≤ 0) だが $D_+u_n<0$ (>0) のときとし，$(n+1)$－step より塑性とする。 他の場合も同じ。

用語 state(m) は前と同じ意味で使うが $u^{(m)}$ は、次のようにしてきめる。 $u^{(0)}=u^{(y)}$, state$(m-1)$ が塑性なら $u^{(m)}$ は"速度"が変わる点の変位, state$(m-1)$ が弾性なら, u が増加で塑性へ入れば $u^{(m)}=u^{(m-1)}+2u^{(y)}$, 減少で塑性へ入れば $u^{(m)}=u^{(m-1)}-2u^{(y)}$. $\dot{f}(u)$ の近似は次の規則により行う。 f_n で n-step での復元力を表わす。 $f_0=0$

(1) n-step が弾性 $\quad f_n-f_{n-1}=k(u_n-u_{n-1})$

(2) 〃 塑性 $\quad f_n-f_{n-1}=(1-\alpha)k(u_n-u_{n-1})$

ただし，塑性域の第1 stepでは便宜上次の補正量を加える。state(m) ―塑性のとき― の第1 stepが $n=p$ で始まるとき,

(2)′ $$f_p-f_{p-1}=(1-\alpha)k(u_p-u_{p-1})+\alpha k(u^{(m)}-u_{p-1})$$

<u>定理 7.</u> 差分方程式 (5) は state(m) において次と同値.

(6) $$\rho D_t D_{\bar{t}} u_n + k u_n - \alpha k \sum_{j=0}^{m} (-1)^j (u_n - u^{(j)}) = 0.$$

次にエネルギー不等式を導くため，次の量を導入する.

$$E_m(n) = \rho(D_t u_n)^2 + k u_n u_{n+1} - \alpha k \sum_{j=0}^{m} (-1)^j (u_n - u^{(j)})(u_{n+1} - u^{(j)})$$

<u>定理 8.</u> E_0 を初期エネルギーとする(差分解の)。 近似質点系が state(m) にあるとすれば，条件

(7) $$\rho - \frac{k}{2}\Delta t^2 > 0$$

のもとで次の不等式が成立する。

(8) $$E_m(n) \leq \left(1 + \frac{\alpha k \Delta t^2}{\rho - \frac{k}{2}\Delta t^2}\right)^{\frac{m}{2}+1} E_0$$

6. 近似解の数値的安定性（多質点系の場合）. n-step

での近似を次の形で行う。

(9) $$\rho_i D_+ D_- u_{i,n} + f_i(v_{i,n}) - f_{i+1}(v_{i+1,n}) = 0$$
$$(i = 1 \sim N)$$

弾－塑性の判定等すべて以前に準ずる。 このとき

定理 8. 離散多質点系が state (m) にあれば (9) 式は次式と同値である。

$$\rho_i D_+ D_- u_{i,n} + \left[k_i v_{i,n} - \alpha_i k_i \sum_{j=0}^{m_i} (-1)^j (v_{i,n} - v_i^{(j)})\right]$$
$$- \left[k_{i+1} v_{i+1,n} - \alpha_{i+1} k_{i+1} \sum_{j=0}^{m_{i+1}} (-1)^j (v_{i+1,n} - v_{i+1}^{(j)})\right] = 0$$
$$(i = 1 \sim N)$$

安定条件については次のことがいえる。

$$E_m(n) \equiv \sum_{i=1}^{N} \left[\rho_i (D_+ u_{i,n})^2 + k_i v_{i,n} v_{i,n+1} - \alpha_i k_i \sum_{j=0}^{m_i} (-1)^j (v_{i,n} - v_i^{(j)})(v_{i,n+1} - v_i^{(j)})\right]$$

$$\beta \equiv \operatorname*{Min}_i \left[\rho_i - (k_i + k_{i+1})\Delta t^2\right] > 0$$

$$\delta \equiv \operatorname*{Max}_i (\alpha_i k_i + \alpha_{i+1} k_{i+1})\Delta t^2 \Big/ \left[\rho_i - (k_i + k_{i+1})\Delta t^2\right]$$

定理 9. $\beta > 0$ という条件のもとで，第 n step でのエネルギー $E(n)$ は初期エネルギー $E(0)$ により次のように評価される。

$$E(n) \leq (1+\delta)^n E(0)$$

文　献

[1] 内藤多仲 監修：耐震・耐風構造（建築構造学 7），鹿島出版会.

[2] Miyoshi, T : System of ordinary differential equations with hysteresis and its numerical approximation (準備中).