数理解析研究所講究録
第 334 巻 1978 年 7-10

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ ВОВЛЕКАЮЩИХ В НИХ ДРОБИ ФАРЕЯ

Сигэру Канэмицу (Фукуока)

Настоящая заметка - конспект работы автора [2], которая теперь в продаже и о содержении которой уже было доложено при оказии собрания для исследования в Киото.

Мы будем применять следующие обозначения везде в этой заметке: F_n - ряд Фарея порядка n, т.е., множество несократимых дробей, лежащих между 0 и 1, оба включенные, с знаменателями, не превосходящими n; Q_n - множество пары знаменателей соседных дробей из F_n: $Q_n = \left\{ (k,k') \,\middle|\, \frac{h}{k} < \frac{h'}{k'} \right\}$. P_1 - функция Бернулли первой степени, т.е., функция с периодом 1, которая в интервале $[0,1)$ совпадает с первым полиномом Бернулли: $P_1(x) = \{x\} - 1/2$. Иные символы будут иметь обычные значения в аналитической теории чисел.

Мы будем исследовать суммы вида

$$S_n = \sum_{(k,k') \in Q_n} k^l \, k'^m ,$$

где l и m - целые числа, которые уже были трактованы в специальных случаях Лернером-Нюманом [3] и Холлом [1].

Наши результаты – улудшения тех, которые получены этими математиками. Имея в виду выше указанные обозначения, сформулируем результаты.

Теорема 1. При целых положительных a, b мы имеем

$$\sum_{(k,k')\in Q_n} k^a k'^b = c_{a,b}\, n^{a+b+2} + O\left(n^{a+b+1} (\log\log n)^{1+\varepsilon}\right)$$

для каждого $\varepsilon > 0$ с постоянной

$$c_{a,b} = \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{1}{(1+a)(1+b)} - \frac{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+b)}{\Gamma(2+a+b)}\right\}.$$

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ и целого положительного m имеют место асимптотические формулы : $\sum_{(k,k')\in Q_n} (kk')^{-m} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{12}{\pi^2}\,\dfrac{1}{n^2}\left\{\log n + \gamma + 1/2 - \dfrac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\log^{5/3} n\,(\log\log n)^{1+\varepsilon}\right), & \text{если } m=2, \\[2ex] 2\,\dfrac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)}\,\dfrac{1}{n^m} - \theta\,\dfrac{1}{\zeta(2)}\,\dfrac{1}{n^4}\log n + O\left(\dfrac{1}{n^{m+1}}\right), & \text{если } m \geq 3, \end{cases}$$

где γ – постоянная Эйлера и θ определяется формулой

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 3, \\ 0, & \text{если } m \geq 4. \end{cases}$$

Теорема 3. Мы имеем в случае $m \geqq 2$

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^m} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,r)=1}}^{r} \sum_{\ell=1}^{m-1} \binom{m}{\ell} \frac{1}{k^{m-\ell}(r-k)^{\ell}} = 1.$$

Доказательства предшествующих двух теорем основываются с одной стороны на следующих леммах:

Лемма 1 (Лернер-Нюман). Для любой функции $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ имеет место формула

$$\sum_{(k,k') \in Q_n} f(k,k') = f(1,1) + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,r)=1}} \Big\{ f(k,r) + f(r,k) - f(k,r-k) \Big\}.$$

Лемма 2 (Вальфиш-Салтыков). Справедлива оценка для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{d \leqq x} \frac{\mu(d)}{d} P_1\left(\frac{x}{d}\right) = O\left(\log^{2/3} x \, (\log\log x)^{1+\varepsilon}\right)$$

А с другой стороны они опираются также на асимптотические результаты Холла и некоторые теоретико-числовые рассуждения (по подробности см. [2]). Теорема 3 - их следствие.

Замечание. Мы приняли несколько слабее версии результатов ради простоты.

В заключение автор выражает благодарность проф. Фудзиваре за давание ему оказию разговора на собрании.

Цитированная Литература

[1] R. R. Hall, A note on Farey series, J. London Math. Soc., (2), 2 (1970), 139-148.

[2] S. Kanemitsu, On some sums involving Farey fractions, to appear in Math. J. Okayama Univ.

[3] J. Lehner and M. Newman, Sums involving Farey fractions, Acta Arith. 15 (1969), 181-187.

Department of Mathematics

Kyushu University

Fukuoka, Japan