数理解析研究所講究録
第 334 巻 1978 年 31-35

Linnikの問題について

東工大　　黒川信重

§1. Linnikの問題

$\mathbb{Q}$：有理数体，$F/\mathbb{Q}$：有限次拡大，K_i/F：有限次拡大，$i=1,\cdots,r$，$r\geqq 1$，C_i：K_iのidele類群とする。

χ_i：K_iの量指標（i.e. $\chi_i : C_i \longrightarrow GL(1,\mathbb{C})$ continuous homomorphism，$\mathbb{C}$：複素数体）に対して，$L(s,\chi_i)$をHecke L-函数とし，$L(s,\chi_i)$をFの整ideals $\mathfrak{a}$について展開したものを $L(s,\chi_i)=\sum_{\mathfrak{a}\text{ in }F} c_i(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}$ と書く。

$c_i(\mathfrak{a})$は次の式で与えられる：

$$c_i(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{A}\text{ in }K_i \\ N_{K_i/F}(\mathfrak{A})=\mathfrak{a}}} \chi_i(\mathfrak{A})$$

，ここで $\mathfrak{A}$ は K_i の整idealsを動く。

このとき，$L_F(s,\chi_1,\cdots,\chi_r) \underset{\text{def}}{=} \sum_{\mathfrak{a}\text{ in }F} c_1(\mathfrak{a})\cdots c_r(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}$ とおき，これを $L(s,\chi_i)$, $i=1,\cdots,r$ のF上のscalar productと呼ぶ。

Linnikの問題とは次の問題を指す。

問題 (Ju. V. Linnik) $L_F(s, \chi_1, \cdots, \chi_r)$ は $\mathbb{C}$ 上で meromorphic ?

この問題について次の事が知られている。

定理 (Draxl [2]) χ_i, $i=1, \cdots, r$ が unitary ならば

$L_F(s, \chi_1, \cdots, \chi_r)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で meromorphic。

§2. 結果

$\underline{n} = (n_1, \cdots, n_r)$, $1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_r$ integers, $r \geqq 1$ について次の定義をする。

$\underline{n}$: type I $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{n} = (1, \cdots, 1, *)$ or $(1, \cdots, 1, 2, 2)$

($r \leqq 2$ なら $\underline{n} = (*)$, $(1, *)$, $(2, 2)$)。

$\underline{n}$: type II $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ otherwise。

Linnik の問題について次の2つの定理を得る。

Theorem 1 $F/\mathbb{Q}$, K_i/F, $i=1, \cdots, r$, $r \geqq 1$, χ_i を §1 のとおりとする。次に $n_i = [K_i : F]$ 拡大次数 としたとき, $1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_r$ であり, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_r)$ が type I と仮定する。このとき $L_F(s, \chi_1, \cdots, \chi_r)$ は $\mathbb{C}$ 上で meromorphic。

Theorem 2 $F/\mathbb{Q}$, K_i/F, $i=1, \cdots, r$, $r \geqq 1$, χ_i を §1 のとおりとし, さらに, χ_i は finite order とする。次に $n_i = [K_i : F]$ としたとき $1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_r$ であり, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_r)$ が type II と仮定する。このとき, $L_F(s, \chi_1, \cdots, \chi_r)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で meromorphic,

$\mathrm{Re}(s)=0$ は natural boundary 。

注意 Theorem 2 において χ_i が finite order の仮定は幾分弱くすることができる。また，§1 で引用した Draxl の定理は，Theorem 1，Theorem 2 を証明する方法で再証明できる。

§3。Main Theorem (Artin type)

$F/\mathbb{Q}$：有限次拡大， K/F：有限次 Galois 拡大，

$G=\mathrm{Gal}(K/F)$：Galois 群， $R(G)$：G の指標環（G の $\mathbb{C}$ 上の virtual characters の作る ring） とする。

K/F で不分岐な F の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して $\alpha(\mathfrak{p})=\left[\dfrac{K/F}{\mathfrak{P}}\right]$ で，その Frobenius 共役類を表わす（$\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{p}$ を割る K の素 ideal）。

$H(T)\in 1+T\cdot R(G)[T]$，T は不定元，に対して

$H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T)\in 1+T\cdot\mathbb{C}[T]$ によって $H(T)$ の係数（G 上の類関数に注意）に $\alpha(\mathfrak{p})$ を代入したものとする。

$L(s,H)\underset{\mathrm{def}}{=}\prod_{\mathfrak{p}} H_{\alpha(\mathfrak{p})}(N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ とおく。ここで，$\mathfrak{p}$ は K/F で不分岐な F の素 ideal 全体を動く。

次の定義もする。 $L(s,H)$：unitary $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $\mathfrak{p}$ に対して $H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T)=\det(1-M_{\mathfrak{p}}T)$ となる unitary 行列 $M_{\mathfrak{p}}$ が存在する（又は $H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T)=1$）。

このとき，次の定理が成り立つ。

Main Theorem (Artin type) $F/\mathbb{Q}$, K/F, G, $H(T) \in 1 + T \cdot R(G)[T]$, $L(s, H)$ を上記のとおりとする。このとき：

(1) $L(s, H)$: unitary $\Leftrightarrow$ $L(s, H)$ は $\mathbb{C}$ 上で meromorphic。

(2) $L(s, H)$: not unitary $\Leftrightarrow$ $L(s, H)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で meromorphic, $\mathrm{Re}(s) = 0$ は natural boundary ($\mathrm{Re}(s) = 0$ 上の各点は $L(s, H)$ の $\mathrm{Re}(s) > 0$ における poles の limit-point になる)。

注意 Main Theorem (Artin type) において $F = K = \mathbb{Q}$ の場合は Estermann [3] で扱われている。

§4. 証明及び関連する結果について

証明は次の所を参照して下さい。

Main Theorem (Artin type) : [5]。

Theorem 1 及び Theorem 2 : [6]。特に Theorem 2 (及び Theorem 1 で χ_i が finite order の場合) は Artin's reciprocity law を用いることにより Main Theorem (Artin type) から導かれます。

なお，応用（保型表現から構成される Dirichlet 級数の meromorphy, etc.）や一般化については [4], [5], [6] を参照して下さい。特に Deligne-Serre [1] の主定理を用いることにより，weight 1 の (holomorphic) elliptic normalized eigen cusp forms に対して "Rankin convolution" の方法が scalar products の形では一般化できないことがわかる。

References

[1] P. Deligne and J.-P. Serre : Formes modulaires de poides 1. Ann. sci. E.N.S. 4e ser., 7, 507-530 (1974)。

[2] P. K. J. Draxl : L-Funktionen algebraischer Tori. J. Number Theory, 3, 444-467 (1971)。

[3] T. Estermann : On certain functions represented by Dirichlet series. Proc. London Math. Soc., 27, 435-448 (1928)。

[4] N. Kurokawa : On the meromorphy of Euler products. Proc. Japan Acad., 54A, 163-166 (1978)。

[5] N. Kurokawa : On the meromorphy of Euler products. Part I. (to appear)。

[6] N. Kurokawa : On Linnik's problem. Proc. Japan Acad., 54A, 167-169 (1978)。