

# 混合境界値問題 — 特に2次元粘性流における細孔効果

東大 理 橋本 英典

## § 1. はしがき

流体力学にあらわれる種々の境界値問題は

- i) 境界の形および性質が複雑で、種々の境界や境界条件の組合せである場合、
- ii) その形があらかじめ未知の境界上で、条件を与える必要がある場合、
- iii) 非線型性のために適当な変換によって線型方程式に直しても、特異な境界条件が満足されねばならない場合、
- iv) 非定常性の結果、境界条件が非定常でしかも混合型になる場合、

など、簡単な境界値問題にひきなおせないものが多い。

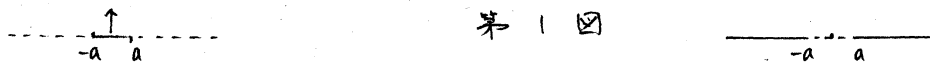
最近の解析的、数値的手法の発展をふまえて、これらの解法をみよおし、具体的な例に適用すると共に、上記の問題に適するよう数学的手法の整備をはかるのが本研究会の目的である。

たとえば最も簡単な2次元のラプラスの方程式

$$\Delta \psi = 0 \tag{1.1}$$

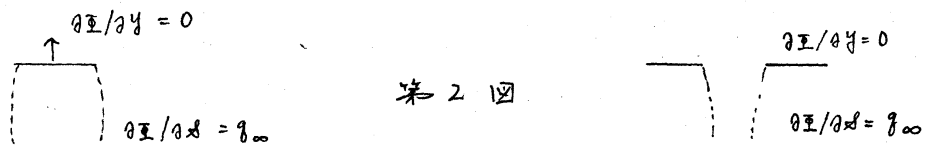
の場合をと、て見よう。水平面上の波の場合だと、底面  $y=0$  で  $\partial\psi/\partial y=0$  の条件の他に、未知水面  $y = \eta(x, t)$  ( $t$  は時間) で非線型の境界条件  $\frac{D}{Dt}(\psi - \eta) = 0$  (運動学的) (1.2),  $\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\text{grad}\psi)^2 + g\eta = \text{一定}$  (力学的) (1.3) が要求され、 $\psi, \eta$  が微小としても、乱されたい水面  $y = h$  で  $\partial\psi/\partial y - \partial\eta/\partial t = 0$ ,  $\partial\psi/\partial t + g\eta = 0$  あるいは  $\eta$  を消去して  $\partial^2\psi/\partial t^2 + g\partial\psi/\partial y = 0$  という時間の入った境界条件を満足する必要がある。

さらに簡単な問題としては平板 ( $|x| < a, y = 0$ ) の完全流体中での運動、平面壁  $y = 0$  内のスリット  $|x| < a$



第1回

を通る流れなどがあるが、そこで  $y = 0$  の一部で  $\psi = 0$ 、一部で  $\partial\psi/\partial y = 0$  の条件を満足する必要がある。さらに流体が



第2回

端で剥離するような場合には、未知の境界 (自由流線上) で圧力 = 一定に相当して接線速度の大きさ  $\partial\psi/\partial x = \infty = \text{一定}$  という条件が要求される。

このような問題の解法としては

- 1) グリーン関数あるいはフーリエ変換を用いて、 $\phi$  あるいは

$z/\bar{z}n$  を未知数とする積分方程式を構成する。これは素片の数に応じて、Wiener-Hopf, dual, triple などの積分方程式\*の解法に帰着する。\* (級数方程式になることもある)。

2) 適当な曲線座標の導入: たとえば半無限の平板の問題がくさびの特別な場合として、円柱座標  $(r, \theta)$  の導入と適当な積分変換によって  $\theta = \pm \pi$  の境界値問題に帰着する。

3) 複素関数論の応用: 領域を半平面あるいは単位円の内外に写像する。あるいは、直線、単位円の両側への解の解析延長を行ない、両者の接続条件を書き下す。後は視察や Cauchy 積分, Poisson-Schwartz の公式などを利用して解を見いだす。

そのとき、複素変数  $z = x + iy$ , 複素速度ポテンシャル,  $J(z) = \psi + i\chi$  ( $\psi$  は  $\psi$  に共役な流れの関数) を導入すれば便利である。このとき  $x, y$  方向の速度  $u, v$  は、複素速度  $w = u - iv$  として  $J'(z)$  に等しい。

自由流線が存在し、壁が直線壁から成れば、 $w$  面での自由流線は  $|w| = \text{一定}$  の円弧に、直線壁は半径に写像されるので話が簡単になる。これがホドグラフ変換の本質である。

渦なしの完全流体以外の場合にも上記の方法の適当な拡張によって解決できる場合が多い。以下ではその簡単な例として、直線状隔壁にスリットのある場合のおよそ 2 次元粘性流の場合を考えて見たい。

## §2. 圧力差と孔のあいた直線壁

$y = 0$  に直線壁がある場合、粘性係数  $\mu$  のおそい粘性流体の二次元流れ、流速  $V = (u, v)$ 、圧力  $p$  を支配するストークスの方程式

$$\operatorname{div} V = 0, \quad \mu \Delta V = \operatorname{grad} p. \quad (2.1)$$

の解は、複素変数  $w = u - iv$ 、 $z = x + iy$  を導入すれば、  
2つの解析関数  $f(z)$ 、 $g(z)$  を用いて、

$$w \equiv u - iv = f(z) + (\bar{z} - z)g'(z) - \bar{g}(\bar{z}) \quad (2.2)$$

$$p \equiv p - i\mu w = 4\mu g'(z) \quad (2.3)$$

の形に書ける<sup>2)</sup>。

孔を  $H$ 、壁を  $W$  であらわすと、問題は本質的には、A) 上下の圧力差  $P_\infty$  により  $H$  を通過する流れ、B) 無限上方で渦度  $w_\infty$ 、無限下方で渦度 0、圧力差 0 ( $y \rightarrow \infty$  で速度  $u \rightarrow -w_\infty y$ 、 $y \rightarrow -\infty$  で速度 0、圧力差 0) の2つの場合を重ね合わせればよい。また  $W$  では粘着条件  $w = 0$  が満足されねばならない。

### A) 圧力差の問題<sup>1)</sup>

圧力に一樣圧  $-\frac{1}{2}P_\infty$  を加え  $y \rightarrow \pm\infty$  で  $p \rightarrow \pm\frac{1}{2}P_\infty$  とした方が見通しがよい。この時、対称性から  $H = 0$  で  $p = 0$ 、 $y = 0$  で  $u = 0$  すなわち

$$\bar{z} = z = x \quad \tau \quad u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re}[f(x) - \bar{g}(x)] = 0, \quad (2.4)$$

従って全領域で  $f(z) = g(z) + iA$  ( $A$  は実の定数) とすること

が定まる。

$$w = (\bar{z}-z)g'(z) + g(z) - \bar{g}(\bar{z}) + iA \quad (2.5)$$

の形に書ける。あるいは、

$$g(z) = -\frac{1}{2}(\phi + i\psi + iA) \quad (2.6)$$

とおけば、 $\phi_x = \psi_y$  を考慮して、単一の調和関数  $\psi$  による表示、

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x, \quad p = -2\mu\psi_y, \quad \omega = 2\psi_x \quad (2.7)$$

ただし、

$$\Delta\psi = 0 \quad (2.8)$$

を得る。

$\psi$  に対する境界条件は (2.6) から、圧力条件を考慮して、

$$y \rightarrow \pm\infty \text{ で } \psi_y \rightarrow \mp \frac{1}{4\mu} p_\infty \quad (2.9)$$

$$W \text{ で } \psi = 0, \quad H \text{ で } \psi_y = 0 \quad (2.10)$$

となる。たとえば上半面だけで考えれば、この問題は  $y \rightarrow \infty$  で  $y$  方向に  $-p_\infty/(4\mu)$  の一様速度を持つ縮まない完全流体の流れの速度ポテンシャル  $\psi$  を求めることと等価である。

このとき  $H$  を通りぬける流量  $Q$  は

$$Q = -\int_H v dx = -\int \psi dx = \frac{1}{4\mu} p_\infty \cdot \frac{1}{2} M' = \frac{p_\infty M'}{8\mu} \quad (2.11)$$

と書ける。ただし  $M'$  は密度 1 の完全流体中を一様な速度で、垂直運動する  $H$  に合同な平板の誘導質量である。また  $H$  の導通率

6

$$\sigma = Q/p_\infty \quad \text{if} \quad \sigma = M'/(8\mu) \quad (2.12)$$

となる。

特にHが一枚の平板 $|x| < h$ に相当するみ $\psi$ のときは

$$\psi = \frac{-p_\infty}{4\mu} \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - h^2}, \quad M' = \pi h^2, \quad \sigma = \pi h^2/(8\mu) \quad (2.13)$$

Hが $l$ の周期で等間隔に配置された幅 $h$ の孔のときは、

$$\psi = -\frac{l p_\infty}{4\pi\mu} \operatorname{Re} \left[ \cosh^{-1} \left( \frac{\cos \frac{\pi z}{l}}{\cos \frac{\pi h}{2l}} \right) \right] \quad (2.14)$$

$z \rightarrow \infty$ では大括弧の中が $-i\pi z/l - \log(\cos \frac{\pi h}{2l}) + O(e^{-\pi y/l})$ に近づき、(2.6)から、下向きに速度

$$v_\infty = \frac{l p_\infty}{4\pi\mu} \left| \log \cos \frac{\pi h}{2l} \right| \quad (2.15)$$

の一樣流が存在することになる。従って1つの孔当りの流量は $\psi$ の $l$ 倍で

$$\sigma = \frac{l^2}{4\pi\mu} \left| \log \cos \frac{\pi h}{2l} \right| \quad (2.16)$$

となる。

## B) Shear flow の問題

全体に一樣 shear flow  $u_\infty = \frac{1}{2} \omega - y$  を加之  $y \rightarrow \pm\infty$  で、 $\omega \rightarrow \pm \frac{1}{2} \omega_\infty$  となる流れについて問題を解き、後で  $u_\infty$  を差し引く方が見通しがよい。このとき、対称性から  $H = 0$  で  $\omega = 0$ 、 $\psi = 0$  で  $v = 0$  するから、

$$z = \bar{z} = x - iy, \quad -v = I_m w = I_m [f(x) - \bar{g}(x)] = 0, \quad (2.17)$$

従って、全領域で、

$$f(z) = -g(z) + B \quad (B \text{ は実定数}) \quad (2.18)$$

となり  $w$  は、

$$w = (\bar{z} - z)g'(z) - g(z) - \bar{g}(\bar{z}) + B \quad (2.19)$$

の形に書ける。あるいは、

$$g(z) = -\frac{1}{2}(\phi + i\psi + B) \quad (2.20)$$

とおけば、 $\psi_x = -\phi_y$  を考慮して、

$$u = \phi + y\phi_y, \quad v = -y\phi_x, \quad p = -2y\phi_x, \quad \omega = -2\phi_y \quad (2.21)$$

ただし、

$$\Delta\phi = 0 \quad (2.22)$$

を得る。

$\phi$  に対する境界条件は、 $\mathbb{W}$  で  $u = 0$ 、 $H$  で  $w = 0$  を考慮し、

$$y \rightarrow \pm\infty \quad \phi_y = \mp \frac{1}{4} \omega_\infty \quad (2.23)$$

であって、(2.8) - (2.10) と比較すれば、A) 場合の解で、

$\psi$  を  $\phi$  で、 $P_\infty$  を  $\mu\omega_\infty$  でおきかえれば、B) の解が直ちに得られる

ことがわかる。このとき  $H$  での 'flow'  $\Gamma_H$  は

$$\Gamma_H = \int_H u dx = \int_H \phi dx = \frac{M' \omega_\infty}{8} \quad (2.24)$$

と書ける。

特に  $H$  が  $|x| < h$  のときは

$$\phi = \frac{-\omega_\infty}{4} I_m \sqrt{z^2 - h^2}, \quad \Gamma_H = \frac{\pi h^2 \omega_\infty}{8} \quad (2.25)$$

## 8

H が (2.14) のような周期的配列のときは  $|y| \rightarrow \infty$  で

$$\delta u_\infty = \frac{\ell \omega_\infty}{4\pi} \log \left( \cos \frac{\pi h}{2\ell} \right) \quad (2.26)$$

の速度が (左向きに) 誘導されることになる。従って、流速は  $|y| \rightarrow \infty$  で

$$u_\infty + \delta u_\infty = -\omega_\infty \left[ \frac{1}{2} |y| + \frac{\ell}{4\pi} \left| \log \cos \frac{\pi h}{2\ell} \right| \right] \quad (2.27)$$

に近づき、孔のない壁が  $y > 0$  で下方に、 $y < 0$  では上方に  $|\delta u_\infty / \omega_\infty|$  だけずらされたのと同じ効果がある。また無限下方で  $u \rightarrow 0$ 、無限上方で  $\omega \rightarrow \omega_\infty$ 、 $(u \rightarrow -\omega_\infty y)$  となるようにするためには壁を  $|\delta u_\infty|$  の速度で右方に動かしてやる必要のあることを示す。

## c) 一般の問題

このときは A) と B) を組み合わせ、2つの調和関数  $\phi$ 、 $\psi$  によって解を

$$u = \phi + y(\phi_y - \psi_x), \quad v = \psi - y(\phi_x + \psi_y) \quad (2.28)$$

$$p = -2\mu(\phi_x + \psi_y), \quad \omega = -2(\phi_y - \psi_x) \quad (2.29)$$

の形にあらわせばよい。W で  $u = u_0$ 、 $v = v_0$  という条件を満たすような解に対して、W での条件は簡単形

$$\phi = u_0(x, 0), \quad \psi = v_0(x, 0)$$

をとる。

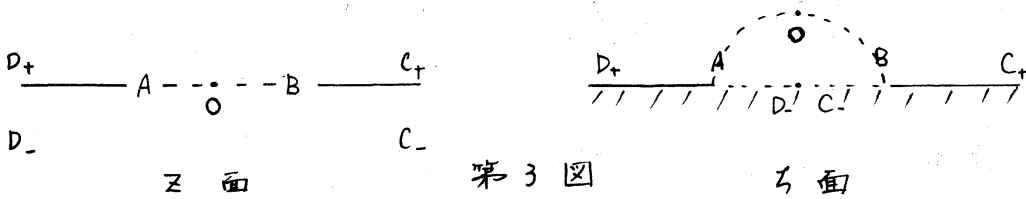
## §.3. 等角写像



等角写像による解法の例として、孔  $|x| < h$  の場合を考へて見る。  $W$  の外側の領域は等角写像

$$z = \frac{h}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \tag{3.1}$$

によつて  $z$  面の上半面に移される。このとき (2.2), (2.3) の  $f, g$  を



第3図

境界条件:  $W$  ( $h = \bar{h}$  すなわち,  $y = 0, |x| > h$ ) に対して

$w = 0$ ,  $h \rightarrow \infty$  すなわち  $y > 0, |z| \rightarrow \infty$  で  $P \rightarrow P_\infty \equiv P_\infty - i\mu\omega_\infty$

$h \rightarrow 0$  すなわち  $y < 0, |z| \rightarrow \infty$  で  $P \rightarrow 0$  の条件で求めればよい。

$$P = 4\mu g'(z) = 4\mu \frac{dg/dz}{dz/d\zeta} = 4\mu \frac{dg/d\zeta}{h/2} \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

なので,  $dg/d\zeta$  が  $h \rightarrow \infty$  で  $\frac{P_\infty}{8\mu}$ ,  $h \rightarrow 0$  で有限であり,  $h = \bar{h}$  で

$w = f - \bar{g} = 0$  ということに注意すれば, たゞらに, 結果に影響

しない定数 を除いて

$$g = \frac{P_\infty h}{8\mu} \zeta, \quad f = \frac{\bar{P}_\infty h}{8\mu} \bar{\zeta} \tag{3.2}$$

であることがわかる。(3.2) を (2.2), (2.3) に代入すれば

$$w = \frac{h}{8\mu} (\zeta - \bar{\zeta}) \left[ \bar{P}_\infty - \frac{P_\infty \zeta^2}{\zeta^2 - 1} \left( 1 - \frac{1}{\zeta \bar{\zeta}} \right) \right] \tag{3.3}$$

$$P = P_\infty \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \tag{3.4}$$

が得られる。特に  $r \rightarrow 0$  とすれば  $\zeta = \frac{h}{2z} + o\left(\frac{1}{z^3}\right)$  である

から、 $z = re^{i\theta}$  とおき、下方面  $\theta < 0$  で  $r \gg h$  のとき

$$w \sim \frac{h^2}{16\mu} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) (\bar{P}_\infty - P_\infty \frac{\bar{z}}{z}) \quad (3.5)$$

$$P \sim \frac{P_\infty h^2}{4} \frac{1}{z^2} = \frac{P_\infty h^2}{4r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \quad (3.6)$$

とわかることがわかる。

これらは §2 の結果と一致する。

#### §4. 二次元ストークスレット

点  $z = z_0$  ( $y_0 > 0$  or  $y_0 = 0$ ,  $|x| < a$ ) に中心を持つ細い

柱の複素速度  $w_0 = v - i\nabla T$  の運動によるおそい流れは柱に働

く力  $(X, Y)$  を用いると、柱から遠い所で

$$w^{(0)} = \bar{c} \log(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - c \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} + \alpha \bar{c} + \beta c + w_0,$$

$$P^{(0)} = -4\mu c / (z - z_0) \quad (4.1)$$

の形に書ける。<sup>2-4)</sup> ただし  $c = (X + iY) / (8\pi\mu)$ ,  $\alpha, \beta$  は柱の形

と大きさ、向きによる複素定数で、(半径  $\varepsilon$  の円柱では  $\alpha =$

$-2 \log \varepsilon$ ,  $\beta = 0$ )。  $h$ ,  $|z_0| \gg \varepsilon$  とし、(2.2) によって壁上

の境界条件  $w^{(0)} + w = 0$  を満たす  $w$  を見つけよう。  $f$  を定めれば

$$f = -\bar{c} \log\left[\left(\zeta - \zeta_0\right) \left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_0 \zeta}\right)\right] + c \left[ \frac{1}{2} - \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)}{h(\zeta^2 - 1)(\zeta - 1/\zeta_0)} \right] - \alpha \bar{c} - \beta c - w_0$$

$$g = c \log\left[\left(\zeta - \bar{\zeta}_0\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta_0 \bar{\zeta}}\right)\right] - \bar{c} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2\zeta_0(z_0 - \bar{z}_0)}{h(\bar{\zeta}_0 - 1)(\zeta - \bar{\zeta}_0)} \right] \quad (4.2)$$

であればよい。ただし  $z_0$  は  $Z_0$  の写像:  $Z_0 = \frac{h}{z} (z_0 + \frac{1}{z_0})$ 。  
 $\epsilon/z_0 \ll 1$ ,  $\epsilon/a \ll 1$  ( $r_0 = |z_0|$ ) の近似では  $z \rightarrow z_0$  で  
 $\omega \rightarrow 0$  の条件から、柱に働く力が、

$$-\bar{c} = -\frac{X-iY}{8\pi\mu} = \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\nu})W_0 - (\beta-\lambda)\bar{W}_0}{|\nu-\alpha|^2 - |\beta-\lambda|^2}, \quad (4.3)$$

$$\nu = -2\log\left[\frac{h}{2}|\zeta_0 - \bar{\zeta}_0| \left|1 - \frac{1}{\zeta_0^2}\right|\right] + \left|\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - 1}{\zeta_0^2 - 1}\right|^2, \quad \lambda = 1 - \frac{2(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - 1)(\zeta_0^3 - \bar{\zeta}_0)}{(\zeta_0^2 - 1)\bar{\zeta}_0} \quad (4.4)$$

と定まる。スリットから下向きに流速  $Q_v$  は円柱座標  $Z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$  を用いられ、

$$Q_v = -\pi h \text{Real}[(\zeta_0 - \bar{\zeta}_0)^2 \zeta_0^{-2} \bar{\zeta}_0^{-1} c] \sim \frac{h^2}{4\mu r_0} \sin^2 \theta_0 (X \cos \theta_0 + Y \sin \theta_0) \quad (4.5)$$

で、後者は  $P^{(0)}_H \sim 4\mu c/z_0$  と (3.6) の  $P_\infty$  とした結果と一致する。また下面での流れは (3.5) に近づく。

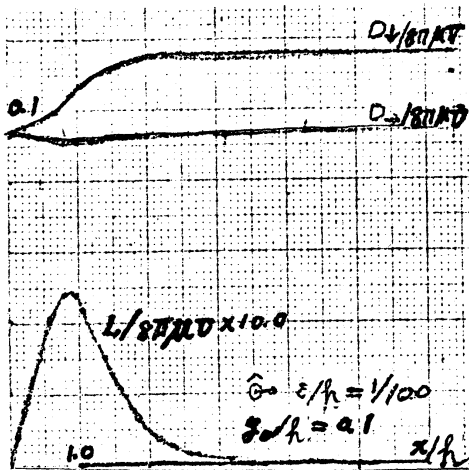


Fig. 4 流れ場に平行な運動  
 B, A 付近の流速分布の形

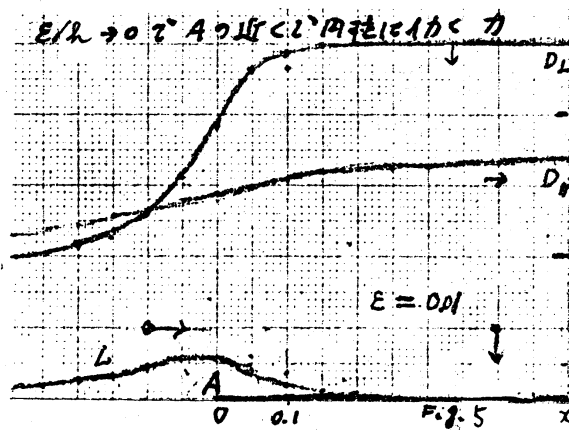


Fig. 5

第4図は、半径が $h$ の $1/100$ の円柱が $x$ 軸に垂直に、あるいは平行に運動するときの抵抗 $D_v$ と $D_h$ を $\gamma_0/h = 0.1$ に対して示す。また $x$ 軸に平行に運動すると $B$ の近くで揚力、 $A$ の近くで負の揚力 $L$ が働くことは注目すべき事柄である。特に、 $\epsilon/h \rightarrow 0$ として、 $A$ の近くで円柱に働く力を $\epsilon = 0.01$ に対して示したのが第5図である。この結果は金文彦がその学位論文(1976)で、半無限平板について得た結果と一致する。

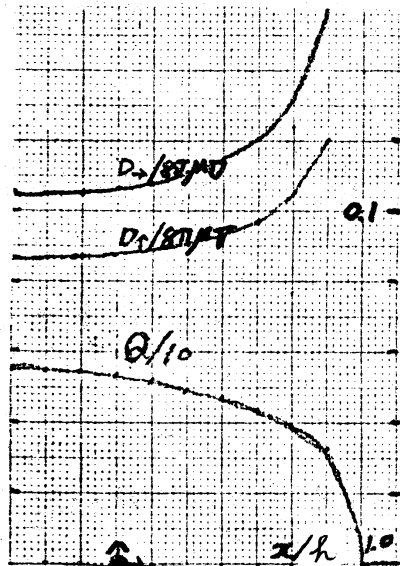


Fig. 6  
スリット内の運動

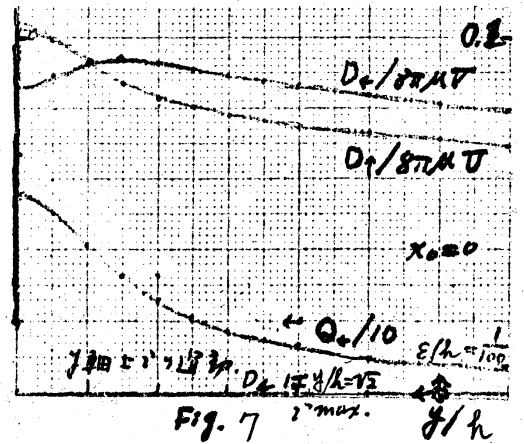


Fig. 7

第6図は $\gamma_0 = 0$ でスリットの中に微小円柱( $\epsilon/h = 0.01$ )の中心がある場合を示す。 $Q$ はスリットの面に垂直な運動のとき、スリットを下方きに通過する流量である。また第7図は、円柱が $y$ 軸上で運動するときの値であって、スリットに垂直に

動くときの抵抗  $D_k$  が  $y/l = \sqrt{2}$  で、極大を持ち、 $y = 0$  で  $D$  より小さい極小値をとることは注目に値する。

#### References

- 1) Hasimoto, H: J. Phys. Soc. Japan 13 (1958) 633.
- 2) Batchelor, G.K.: J. Fluid Mech. 44 (1970) 419.
- 3) 今井功: 流体力学上裳華房 (1973) p.335.
- 4) 成瀬文雄: 教理解析研究所講究録 234 (1975) 4.