

くさび状領域内の 3 次元 Stokes 方程式の解

東大 工 佐野 理

§ 1. 序

境界のある領域内で微小物体がゆっくり運動する時、これに対する壁の影響を調べた計算例がこれまでにいくつか知られている。この種の問題では、物体の代表的長さを a 、運動速度を V 、流体の密度を ρ 、粘性率を μ とすれば、流れの場を特徴づける Reynolds 数 ($= \rho Va / \mu$) は充分小さくなり、従って流れは Stokes 方程式で記述し得る。このような解析の例として、古くは Lorentz⁸⁾ による一平面壁、Ladenburg⁷⁾ による円筒壁、更に Faxén^{2,3)} による平行二平面壁の影響の計算等に始まり、以来いくつかの拡張や精密化が試みられている。詳しくは、例えば Happel & Brenner⁴⁾ の本を参照されたい。これに対し、有界領域内に他の運動物体があるとしてその流れを解析したものは比較的少ない。これらの現状をふまえ、この小論では 2 つの平面壁に挟まれたくさび状領域に非圧縮性

粘性流体が満たされており、その内部の任意の位置で任意の方向に微小球がゆっくり運動する場合を扱う。この時領域内に実現される流れを解析し、また球に働く力やモーメントを求めることが目標であるが、今回は特に後者について述べ、流れに関しては別の機会に譲りたい。

§2. 問題の定式化と解法

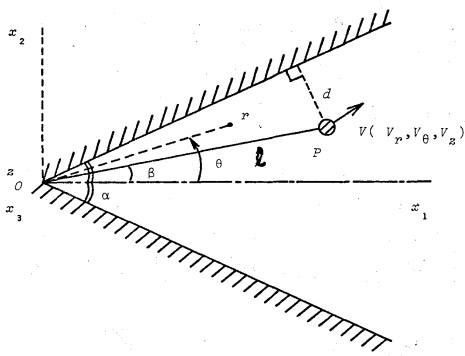


図 1

$\theta = \beta, z = 0$)と表わされる。§1でも述べたように基礎方程式は Stokes 方程式

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \text{---(2.1)}$$

及び連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{---(2.2)}$$

であり、これらを

$$\mathbf{v} = 0 : \text{無限遠、壁面 } W \text{ 上} \quad \text{---(2.3a,b)}$$

半頂角 α のくさび形領域を考え、図1のように直交座標 (x_1, x_2, x_3) 及び円柱座標 (r, θ, z) をとる。2つの平面壁は $\theta = \pm \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$)、球の中心は P ($r = l,$

$$V = V(\text{given}) : \text{球面上} \quad \text{---(2.3c)}$$

なる境界条件の下に解析する。(2.1)(2.2)の解としては、調和関数 ϕ_n ($n=1, \dots, 4$) を用いた次の表現⁶⁾

$$V = \nabla(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\phi} + \phi_4) - 2\phi, \quad p = 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\phi},$$

$$\text{但し } \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \text{---(2.4)}$$

を用いるが、一般に(2.3)の境界条件をすべて同時に満たす解を見出すことは困難なので反復法を用いる。この方法によれば $V = \sum_{n=1}^{\infty} V^{(n)}$, $p = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}$ なる形の級数解を仮定し、(2.3a,c)の条件を満たす解(従って壁の存在を考えない解) $(V^{(1)}, p^{(1)})$ を求め、これに第2近似 $(V^{(2)}, p^{(2)})$ を加えて W 上で $V^{(1)} + V^{(2)} = 0$ を満たさせる。同様にして次々と $(V^{(3)}, p^{(3)})$, $(V^{(4)}, p^{(4)})$, ... をつけ加え、境界条件を部分的に交互に満足させながら近似を高めてゆくわけであるが、この小論では最低次の壁効果を考えることにし、 $(V^{(2)}, p^{(2)})$ まで考慮する。

$(V^{(2)}, p^{(2)})$ がわかると、一般化された Faxén の方法¹⁾ によって球に働く力やモーメントの壁の影響による補正項が評価できる。基礎方程式及び境界条件が線形であることから、以下では球の運動を便宜上、両方の壁に平行な場合(即ち z 方向, §3) とそれに垂直な面内(即ち例えば $z=0$ 面内, §4) の2つに分解して考える。一般の場合はこれらの重ね合わせで表現できる。

§3. 二平面に平行に運動する場合

球が z 軸に平行に速度 V_z で並進運動をするとする。第1近似解 $V^{(1)}$ は、無限に広い領域内での球の運動に対応するものであるが、壁付近での境界条件を合わせるため球から充分遠方を考えると、それを stokeslet による流れで近似できる。これを $\phi_n^{(1)}$ を用いて表わせば

$$\phi_1^{(1)} = \phi_2^{(1)} = \phi_4^{(1)} = 0, \quad \phi_3^{(1)} = \chi,$$

$$\chi = -c_z/R, \quad c_z = \frac{3}{4}aV_z, \quad R^2 = l^2 + r^2 - 2lr \cos(\theta - \beta) + z^2,$$

---(3.1)

となる。これに $V^{(2)}$ ($\phi_n^{(2)}$ で表わされる)を加えて W 上で $V^{(1)} + V^{(2)} = 0$ となるようにする。即ち、 $\nabla^2 \phi_n = 0$ かつ $W(\theta = \pm\alpha)$ 上で

!---(3.2)

$$(r \frac{\partial}{\partial r} - 1)(\cos\theta \cdot \phi_1 + \sin\theta \cdot \phi_2) + z \frac{\partial}{\partial r} \phi_3 + \frac{\partial}{\partial r} \phi_4 = -z \frac{\partial}{\partial r} \chi,$$

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_1 + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_2 + \sin\theta \phi_1 - \cos\theta \phi_2$$

$$+ \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_4 = -\frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi,$$

$$r \frac{\partial}{\partial z} (\cos\theta \cdot \phi_1 + \sin\theta \cdot \phi_2) + (z \frac{\partial}{\partial z} - 1) \phi_3 + \frac{\partial}{\partial z} \phi_4 = -(z \frac{\partial}{\partial z} - 1) \chi,$$

---(3.3)

なるものを見出す。ここに $\phi_n^{(2)}$ の添字(2)は省略した。

(3.3)は、例えば $\theta = \pm\alpha$ で

$$\cos\theta \cdot \phi_1 + \sin\theta \cdot \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = -\chi, \quad \phi_4 = 0,$$

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \phi_1 + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \phi_2 + \sin\theta \cdot \phi_1 - \cos\theta \cdot \phi_2 + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \phi_3 = - \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \chi \quad \dots (3.4)$$

とすれば満たされる。

さて、(3.2)(3.4)は z 方向に Fourier 変換、 r 方向に Kontrovich-Lebedev 変換⁹⁾を施すことにより、解くことができるが、計算の詳細は省略する (ref. 12, 13, 14)。 $\phi_n^{(2)}$ が求まると、これを(2.4)に代入して $V^{(2)}$ が、従って壁の影響で球が受ける力の増加分及びモーメントが評価でき、次のような結果を得る。

$$F/6\pi\mu aV_z = - [1 + \varepsilon f_{zz}(\alpha, \beta)] e_z + O(\varepsilon^2), \quad \dots (3.5)$$

$$T/8\pi\mu a^2V_z = - \varepsilon^2 [t_{rz}(\alpha, \beta) e_r + t_{\theta z}(\alpha, \beta) e_\theta] + O(\varepsilon^4),$$

ここに、 $\varepsilon = a/d$ 、 $d = l \sin|\alpha - \beta|$ であり、 f や t は

$$f_{zz} = \frac{3}{4} \sin|\alpha - \beta| \int_0^\infty dv \left\{ 1 + \tanh(\pi v) \left[-M_0 + 2\left(v^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{q^A}{\Delta^+ \cdot D^-} + \frac{q^S}{\Delta^- \cdot D^+} \right) \right] \right\},$$

$$M_0 = [\cosh(2\alpha v) - \cosh(2\beta v)] / \sinh(2\alpha v),$$

$$t_{rz} = \frac{3}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \int_0^\infty dv \tanh(\pi v) \left[M_1 - 2\left(v^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{q^A \cdot r^A}{\Delta^+ \cdot D^-} + \frac{q^S \cdot r^S}{\Delta^- \cdot D^+} \right) \right],$$

$$M_1 = v \sinh(2\beta v) / \sinh(2\alpha v),$$

$$t_{\theta z} = \frac{3}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \int_0^{\infty} dv \left\{ \frac{1}{2} - \tanh(\pi v) \left[\frac{1}{2} M_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(v^2 + \frac{1}{4}) \left(\frac{(g^A)^2}{\Delta^+ \cdot D^-} + \frac{(g^S)^2}{\Delta^- \cdot D^+} \right) \right] \right\},$$

$$g^A = \sin \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \cos \beta \cdot \sinh(\beta v) - \cos \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \sin \beta \cdot \cosh(\beta v),$$

$$g^S = \sin \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \cos \beta \cdot \cosh(\beta v) - \cos \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \sin \beta \cdot \sinh(\beta v),$$

$$r^A = \sin \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \sin \beta \cdot \sinh(\beta v) + \cos \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \cos \beta \cdot \cosh(\beta v),$$

$$r^S = \sin \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \sin \beta \cdot \cosh(\beta v) + \cos \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \cos \beta \cdot \sinh(\beta v),$$

$$\Delta^{\pm} = \sinh(2\alpha v) \pm v \sin 2\alpha, \quad D^{\pm} = \cosh(2\alpha v) \pm \cos 2\alpha$$

で与えられる。

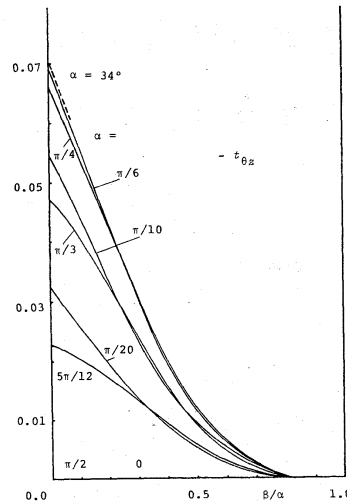
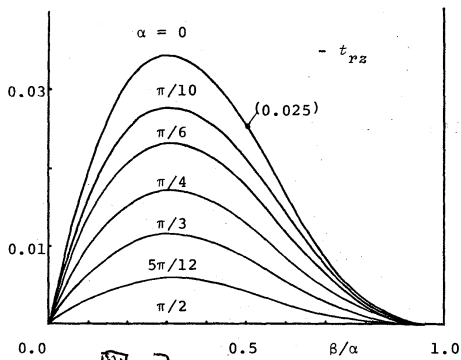
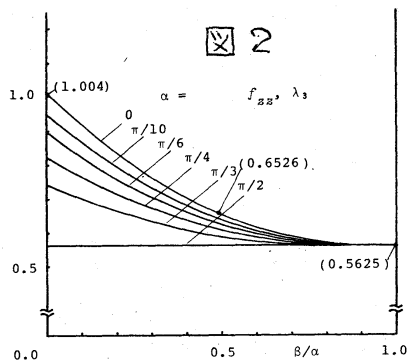


図 4

f_{zz} , t_{rz} , $t_{\theta z}$ のグラフを図2~4に示す。これらは一平面壁 ($\alpha = \pi/2$)⁸⁾、平行二平面壁 ($\alpha = 0$)^{3,5)} の壁効果を含むだけでなく、既に計算した特別な場合即ち直交二平面壁 ($\alpha = \pi/4$)^{10,11)} 及びくさびの対称面上での運動に対する壁効果¹²⁾ とも一致する。ここで求めたトルクは $O(\varepsilon^2)$ であり、一平面壁に平行に動く場合に球に働く $O(\varepsilon^4)$ のトルク²⁾ よりも低次である。

その方向は各点ごとに異なり、中心面上では θ 方向、壁の近くでは r 方向へと次第に移り変ってゆくが、大きさ ($= \sqrt{t_{rz}^2 + t_{\theta z}^2}$) は壁に近づくにつれ0になり、一平面の場合に知

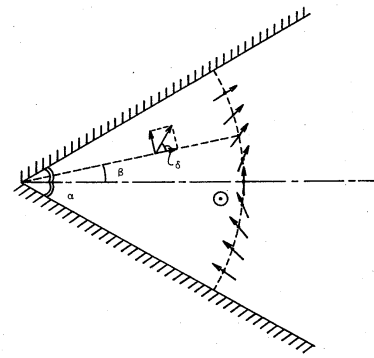


図 5

られていた結果と一致する。例として、 $\alpha = \pi/6$ の場合、球に働くモーメントの方向を図5に示す。(球は紙面に垂直に裏から表へ動く。)

§4. 二平面に垂直な面内での運動

球が $z = 0$ 面内を速度 $U = (V_r, V_\theta, 0)$ で並進運動する場合にも前節と同様に計算することができる。結果のみ記し、計算の手続は ref. 12, 13, 14 に譲る。

$$F/6\pi\mu a V_r = - [1 + \varepsilon f_{rr}(\alpha, \beta)] e_r - \varepsilon f_{r\theta}(\alpha, \beta) e_\theta,$$

$$F/6\pi\mu a V_\theta = - \varepsilon f_{\theta r}(\alpha, \beta) e_r - [1 + \varepsilon f_{\theta\theta}(\alpha, \beta)] e_\theta,$$

$$T/8\pi\mu a^2 |U| = - \varepsilon^2 [t_{zr}(\alpha, \beta) + t_{z\theta}(\alpha, \beta)] e_z,$$

\therefore

$$f_{rr} = \frac{3}{4} \sin|\alpha - \beta| \int_0^\infty dv \left\{ 1 + \tanh(\pi v) \left[\frac{1}{2} M_0 + \frac{3}{4} \left(\frac{N_{rr}^+}{\Delta^+} + \frac{N_{rr}^-}{\Delta^-} \right) + 2 \left(\frac{N_{rr}^A}{\Delta^+ D^-} + \frac{N_{rr}^S}{\Delta^- D^+} \right) \right] \right\},$$

$$N_{rr}^\pm = v \cos 2\alpha \sin 2\beta \sinh(2\beta v) - [\cosh(2\alpha v) - \cosh(2\beta v)] \pm \cos 2\beta [\cosh(2\alpha v) \cosh(2\beta v) - 1],$$

$$N_{rr}^A = q^A [3v p^A + (v^2 + \frac{7}{4}) q^A],$$

$$N_{rr}^S = q^S [3v p^S + (v^2 + \frac{7}{4}) q^S],$$

$$f_{r\theta} = f_{\theta r} = \frac{3}{4} \sin|\alpha - \beta| \int_0^\infty dv -\frac{3}{4} \tanh(\pi v) \left(\frac{N_{r\theta}^+}{\Delta^+} + \frac{N_{r\theta}^-}{\Delta^-} \right),$$

$$N_{r\theta}^\pm = v \sinh(2\beta v) (1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta) \pm \sin 2\beta [\cosh(2\alpha v) \cosh(2\beta v) - 1],$$

$$f_{\theta\theta} = \frac{3}{4} \sin|\alpha - \beta| \int_0^\infty dv \left[1 + \frac{1}{2} \tanh(\pi v) \left(\frac{N_{\theta\theta}^+}{\Delta^+} + \frac{N_{\theta\theta}^-}{\Delta^-} \right) \right],$$

$$N_{\theta\theta}^\pm = v^2 [\cosh(2\beta v) (1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta) \mp (\cos 2\alpha - \cos 2\beta)]$$

$$\pm v \sin 2\beta \sinh(2\beta v) [\cosh(2\alpha v) \mp \cos 2\alpha]$$

$$- [\cosh(2\alpha v) - \cosh(2\beta v)] \mp \cos 2\beta [\cosh(2\alpha v) \cosh(2\beta v) - 1],$$

$$t_{zr} = \frac{3}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \int_0^{\infty} dv \tanh(\pi v) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{N_{zr}^+}{\Delta^+} + \frac{N_{zr}^-}{\Delta^-} \right) + 2 \left(\frac{N_{zr}^A}{\Delta^+ D^-} + \frac{N_{zr}^S}{\Delta^- D^+} \right) \right],$$

$$N_{zr}^{\pm} = v^2 \sin 2\beta \left[\pm 1 - \cos 2\alpha \cosh(2\beta v) \right] - v \sinh(2\beta v) \left[1 \pm \cos 2\beta \cosh(2\alpha v) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta) \right] \pm \frac{1}{2} \sin 2\beta \left[\cosh(2\alpha v) \cosh(2\beta v) - 1 \right],$$

$$N_{zr}^A = r^A \left[v p^A + \left(v^2 + \frac{3}{4} \right) q^A \right] - \delta^A (2v^2 p^A + v q^A),$$

$$N_{zr}^S = r^S \left[v p^S + \left(v^2 + \frac{3}{4} \right) q^S \right] - \delta^S (2v^2 p^S + v q^S),$$

$$t_{z\theta} = \frac{3}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \int_0^{\infty} dv \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \tanh(\pi v) \left(\frac{N_{z\theta}^+}{\Delta^+} + \frac{N_{z\theta}^-}{\Delta^-} \right) \right],$$

$$N_{z\theta}^{\pm} = 2v^2 \left[\cosh(2\beta v) (1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta) \mp (\cos 2\alpha - \cos 2\beta) \right] \pm v \sin 2\beta \sinh(2\beta v) \left[2 \cosh(2\alpha v) \pm \cos 2\alpha \right] + \cosh(2\alpha v) - \cosh(2\beta v) \pm \cos 2\beta \left[\cosh(2\alpha v) \cosh(2\beta v) - 1 \right],$$

$$p^A = \cos \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \cos \beta \cdot \sinh(\beta v) + \sin \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \sin \beta \cdot \cosh(\beta v),$$

$$p^S = \cos \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \cos \beta \cdot \cosh(\beta v) + \sin \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \sin \beta \cdot \sinh(\beta v),$$

$$\delta^A = \sin \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \cos \beta \cdot \cosh(\beta v) - \cos \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \sin \beta \cdot \sinh(\beta v),$$

$$\delta^S = \sin \alpha \cdot \sinh(\alpha v) \cos \beta \cdot \sinh(\beta v) - \cos \alpha \cdot \cosh(\alpha v) \sin \beta \cdot \cosh(\beta v),$$

である。f及びtのグラフを図6~10に示す。これらの結果から明らかのように、一般には運動方向に垂直な力 $f_{r\theta}$ (= $f_{\theta r}$) が働く。しかし、次節に述べるように、ある特別な運動の方

向に限り、横方向の力が消える。これを「並進の主軸」と呼ぼう。

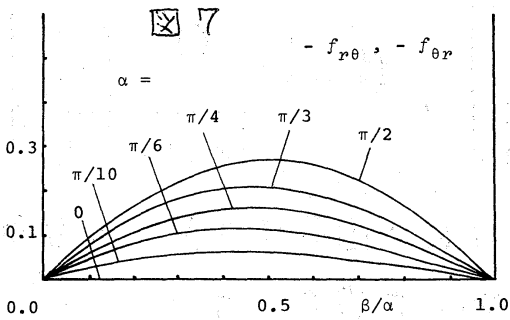
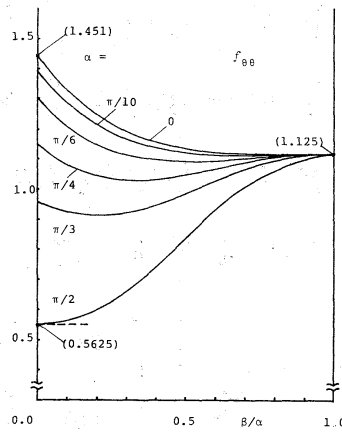
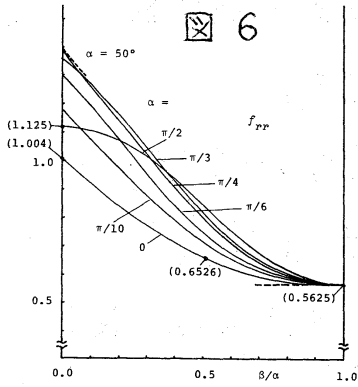


図 8

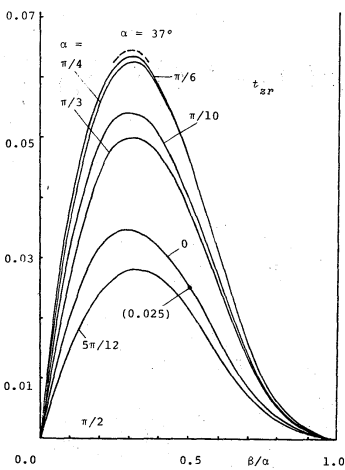


図 9

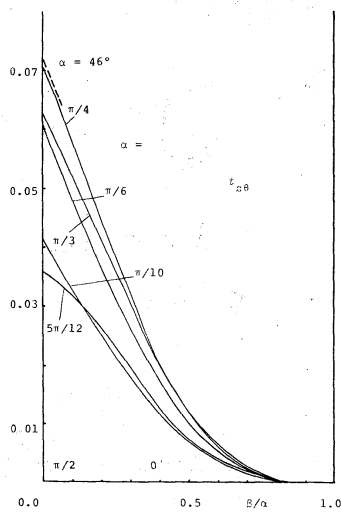


図 10

§5. 「並進の主軸」と「トルクの働かない方向」

これまでの議論をまとめると、くさび形領域内で球が速度 $\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z)$ で並進運動をするとき球に働く力及びトルクは次のように表わされることになる。

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu a [1 + \varepsilon \mathbf{K} + O(\varepsilon^2)] \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T} = -8\pi\mu a^2 [\varepsilon^2 \mathbf{C} + O(\varepsilon^4)] \cdot \mathbf{V},$$

ここに \mathbf{K} 及び \mathbf{C} は境界の形とそれに対する球の相対位置で決まるテンソルであって、

$$\mathbf{K} = \left(\begin{array}{cc|c} f_{rr} & f_{r\theta} & 0 \\ f_{\theta r} & f_{\theta\theta} & 0 \\ \hline 0 & 0 & f_{zz} \end{array} \right), \quad \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & t_{rz} \\ 0 & 0 & t_{\theta z} \\ \hline t_{zr} & t_{z\theta} & 0 \end{array} \right)$$

で与えられる。「並進の主軸」は \mathbf{K} の固有ベクトルの方向であるが、それらの方向に球が運動した場合 球は

$$6\pi\mu a [1 + \varepsilon\lambda_n + O(\varepsilon^2)] |\mathbf{V}|, \quad n=1, 2, 3,$$

$$\text{但し } \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (f_{rr} + f_{\theta\theta}) \pm \left[\frac{1}{4} (f_{rr} - f_{\theta\theta})^2 + f_{r\theta}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_3 = f_{zz},$$

なる抵抗を受ける。また、 $z=0$ 面内で球が

$$\gamma = \tan^{-1}(V_\theta/V_r) = -\tan^{-1}(t_{zr}/t_{z\theta}),$$

なる方向に運動する場合には $O(\varepsilon^2)$ のトルクは相殺することも容易にわかる。

§ 6. 補足

[1] これまで述べてきた力やモーメントの表現では最短距離 $d = l \sin|\alpha - \beta|$ を用いて ε を定義したために、関数 f や t の β に関する対称性が破れ、一見したところくさびの中心面 ($\beta = 0$) が特異な点であるような誤解を招くかもしれない。しかし、力やモーメントの補正項は εf あるいは $\varepsilon^2 t$ の総体として意味を持つものであり、この点をはっきりさせる為に

$$f^* = f / \sin|\alpha - \beta|, \quad t^* = t / \sin^2(\alpha - \beta), \quad \varepsilon^* = a/l,$$

を定義すると、原点からの距離 l を一定にして球を一方の壁 ($\theta = -\alpha$) から他方の壁 ($\theta = \alpha$) まで動かすとき、力やモーメントの大きさや方向が滑らかに移り変ってゆくことが容易に確かめられる。

[2] いくつかの漸近的性質についても § 3, 4 の結果を詳しく調べることによって得られる。例えば、くさびの角度が 0 に近づくとき f や t は中心面 ($\beta = 0$) 上で

$$f_{rr} = 1.004121 + \alpha^2 \left[-\frac{135}{64} \ln \alpha - 0.951767 \right] + \dots,$$

$$f_{\theta\theta} = 1.451568 - 0.510735 \alpha^2 + \dots,$$

$$f_{zz} = 1.004121 + \alpha^2 \left[\frac{27}{64} \ln \alpha + 0.005108 \right] + \dots,$$

$$t_{\theta z} = -0.224330 \alpha - \alpha^3 \left[\frac{27}{64} \ln \alpha + 0.050810 \right] + \dots,$$

$$t_{z\theta} = 0.138044 \alpha - 0.084947 \alpha^3 + \dots,$$

となるが、 f_{rr} や f_{zz} に現われた 1.004, $f_{\theta\theta}$ に於ける 1.451

は平行二平面壁の場合のそれぞれの値に一致する。^{3,5)} その他 α が $\pi/2$ に近づき一平面に漸近する様子、球が壁に近づく様子等を調べることもできるが、詳細は ref. 13, 14 に譲る。

[3] これまで我々は無限遠で流体は静止しており、運動物体も球であると制限してきたが、物体に働く力に関してはもっと一般化することが可能である¹⁾。即ち、無限に広い流体内を速度 V で運動する物体に働く力 F_0 が

$$F_0 = -6\pi\mu c S_0 \cdot V,$$

(c は物体の代表的大きさ、 S_0 は Stokes テンソル) で与えられるとすると、同じ物体がくさび状領域内を運動する場合の力 F は

$$F = [1 - S_0 \cdot K \frac{c}{a} + o(\frac{c}{a})]^{-1} \cdot F_0,$$

で与えられる。また、もし無限遠で流体が動いており、その結果物体の置かれた位置に、もしその物体がなければ v_p なる速度で流体が流れているとすれば、物体に働く力として上記の表現の V の代りに $V - v_p$ を用いればよい。しかしながらモーメントに対しては球以外の物体に直ちに拡張することはできず、与えられた形状の物体に対し個別的に取り扱わねばならない。

References

- 1) Brenner, H.: *J. Fluid Mech.* 12(1962)35; 18(1964)144.
- 2) Faxén, H.: Dissertation, Uppsala University(1921),
through reference 4.
- 3) Faxén, H.: *Ann. Phys.* 68(1922)89.
- 4) Happel, J. & Brenner, H.: *Low Reynolds number hydrodynamics*
(Noordhoff, 1973).
- 5) Ho, B.P. & Leal, L.G.: *J. Fluid Mech.* 65(1974)365.
- 6) Imai, I.: *Ryutai Rikigaku* (Fluid Dynamics) (Syokabo, Tokyo,
1973) Vol.1 [in Japanese].
- 7) Ladenburg, R.: *Ann. Phys.* 23(1907)447.
- 8) Lorentz, H.A.: *Abhandl. theoret. Phys., Leipzig* 1(1907)23.
- 9) Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F.G.: *Tables of*
Integral Transforms, ed. Erdélyi, A. (McGraw-Hill, 1954)
Vol.2.
- 10) Sano, O. & Hasimoto, H.: *J. Phys. Soc. Japan* 40(1976)884.
- 11) 佐野 理: 数研研講究録 293(1977)10.
- 12) Sano, O. & Hasimoto, H.: *J. Phys. Soc. Japan* 42(1977)306.
- 13) Sano, O.: D.Sc. Thesis, University of Tokyo(1977).
- 14) Sano, O. & Hasimoto, H.: submitted to *J. Fluid Mech.*