数理解析研究所講究録
第 336 巻 1978 年 41-52

Ideal の saturation の問題について

神大 教養　角田 譲

κ を regular uncountable cardinal とする. I を κ の上の κ-complete non-principal ideal とする. すなわち I を次の条件を満足する $P(\kappa)$ の proper subset とする。

(i) 全ての $\xi < \kappa$ に対して $\{\xi\} \in I$,

(ii) $A \subseteq \kappa$, $A \subseteq B \in I \longrightarrow A \in I$,

(iii) $A \in I$, $B \in I \longrightarrow A \cup B \in I$,

(iv) $\langle A_\xi ; \xi < \zeta \rangle$, $\zeta < \kappa$, $A_\xi \in I$ $(\forall \xi < \zeta)$
$$\longrightarrow \bigcup_{\xi<\zeta} A_\xi \in I.$$

Exemple 1. κ の subset A が κ において unbounded であるとは, 任意の $\xi < \kappa$ に対して, $\xi < \zeta$ なる $\zeta \in A$ が存在する事である. $A \subseteq \kappa$ が unbounded でないば, A は, κ において bounded であるという. κ の bounded subsets の全体は, κ の上の κ-complete non-principal ideal

となる．実際それは．最小の κ の κ-complete non-principal ideal となる．

Exemple 2． κ の subset K が κ において closed であるとは．任意の limit ordinal $\alpha < \kappa$ に対して，$\alpha \cap K$ が，α において unbounded であるならば．常に $\alpha \in K$ となる事である。κ の subset S が stationary であるとは．任意の，κ の closed unbounded set K に対して，$K \cap S \neq \phi$ なる事である。κ の non-stationary set の全体は，κ の上の κ-complete non-principal ideal となる．

Exemple 3． κ が ineffable cardinal であるとは次の条件を満足する事をいう．（Jensen）

$A_\alpha \subseteq \alpha$ を満足する任意の sequence $\langle A_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle$ に対して，$\{\alpha < \kappa ; \alpha \cap K = A_\alpha\}$ が stationary set となる κ の subset K が存在する．

κ を ineffable cardinal とする時．κ の subset B が ineffable であるとは．任意の sequence $\langle A_\alpha ; \alpha \in B \rangle$ に対して．$\{\alpha \in B ; \alpha \cap A = A_\alpha\}$ が stationary となる κ の subset A が，存在する事をいう．κ の non-ineffable subsets の全体は．κ-complete non-principal ideal となる．

I を κ の上の κ-complete non-principal ideal とする．

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ が，I-disjoint であるとは，任意の異る $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$A \cap B \in I$ が成立している事をいう．

δ が cardinal とする．I が δ-saturated であるとは，任意の I-disjoint family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - I$ に対して常に，$|I| < \delta$ なる事をいう．

I が 2-saturated の時，I は prime κ-complete non-principal ideal となる

Ideal の saturation の問題は，古くは，Tarski〔 〕等によって研究されたが，post-Cohen においては，Solovay，Kunen，Paris，Baumgartner 等によって種々の結果が得られている．特に最近，Prikry，Jech によって，Singular cardinal problem とも関連した結果が得られている．

しかしながら，次の問題は，依然として，現在未解決である．

" non-stationary set の全体の作る κ の上の κ-complete non-principal ideal は，κ^+-saturated であるか？"

Solovay は，non-stationary set の全体の作る ideal が，nowhere κ-saturated，すなわち，任意の stationary set が，κ 個の disjoint な stationary set の分割となる事を証明している（Solovay〔 〕）．

Solovay の上の結果は，次の2つの lemma が，本質的な

役割を果している。

Lemma 1. Sをκの上のstationary setとする時、$S-\{\alpha<\kappa : \alpha$はS-stationary$\}$は、stationary setである。

Lemma 2. Iをnormal κ-saturated ideal (on κ)とする。Sをstationary setとするならば、$\{\alpha<\kappa : \alpha$はS-stationary$\}$は、I-measure oneを持つ。

ここで、Lemma 1, Lemma 2での用語を定義しておく。

Sを、ordinalsよりなるclassとするならば、ordinal αが、S-stationaryであるとは、i), $cf(\alpha)>\omega$, ii), $\alpha\cap S$が、αにおいてstationary setなる事をいう。

κの上のκ-complete non-principal idealが、normalであるとは、任意の$A\subseteq\kappa$, $A\notin I$, $f: A\longrightarrow\kappa$, $f(\alpha)<\alpha$, $\alpha\in A$, $\alpha\neq 0$に対して、$f^{-1}(\{\xi\})\notin I$なる$\xi<\kappa$が存在する事をいう。

Namba [ ]において、Solovayの上の結果を用いて、先に掲げた問題に対して、次の部分的な解答を得た。

Theorem. κが、κ-saturated normal idealをもつならば、κの上のnon-stationary setの全体からなるideal

は κ^+-saturated でない。

先に揚げた問題の多くの approach は、ideal 全体のなす代数的構造に着目する事にある。$\mathbb{O}$ を以後、κ の上の、non-stationary set 全体の作る normal ideal、$\mathbb{1}$ を improper ideal, i.e., $\mathbb{1}=\mathcal{P}(\kappa)$ とする。$\mathbb{O}$ を含む ideal の全体の集合を $\mathcal{P}$ で示す。$I, J \in \mathcal{P}$ に対して、$I \le J$ は、$I \subseteq J$ を意味する。その時、$\langle \mathcal{P} ; \le \rangle$ は、順序集合となるが、実際、pseudo-Boolean algebra となる。$\mathcal{P}$ が束になる事は、$I \wedge J$, $I \vee J$ を次の様に定義すれば良い。

$$I \wedge J = I \cap J$$

$$I \vee J = \{A \cup B ; A \in I, B \in J\}$$

pseudo-complement に対しては、$I \Rightarrow J$ を、次の様に定義すれば良い。

$$I \Rightarrow J = \{A \subseteq \kappa ; I \le J \restriction A\}$$

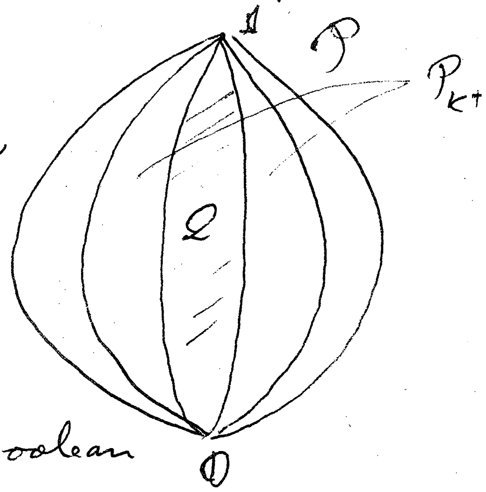
但し、ここで、$J \restriction A = \{B \subseteq \kappa ; A \cap B \in J\}$ である。

ゆえに、$-I$ は、$I \Rightarrow \mathbb{O}$ で定義される。I が、$\mathcal{P}$ の dense element、すなわち、$-I = \mathbb{O}$ になるための必要十分条件は従って、$I \le \mathbb{O} \restriction A$ なる stationary set A が存在しないという事になる。

さて、$\mathcal{P}_{\kappa^+}$ で κ の上の normal ideals の全体とする。但し、ここで、improper ideal $\mathbb{1}$ も normal ideal とする

その時、$\mathcal{P}_{K^+}$は、$\mathcal{P}$のsubalgebraとなる。

次に、$\mathcal{O}\upharpoonright A$なる型のideal全体を$\mathcal{Q}$とすると、やはり$\mathcal{Q}$もまた$\mathcal{P}$のsubalgebraとなる。実際に、$\mathcal{Q}$は$[A]$に対して、$\mathcal{O}\upharpoonright(-A)$を対応させる事によって、the quotient algebra $\mathcal{P}(K)/\mathcal{O}$と同型となる。但しここで$[A]$は、$A \subseteq K$のequivalence class modulo $\mathcal{O}$を示する。



さて、次に$\mathcal{P}$におけるinfinite join, meetを考える。

$\langle I_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle$を$I_\lambda \in \mathcal{P}$とすると、明らかに$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \in \mathcal{P}$となる。

ゆえに、$\mathcal{P}$はcomplete pseudo-Boolean algebraとなるが、そのinfinite joinを$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$、infinite meetを$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$で示す事にする。同様に、$\mathcal{P}_{K^+}$もまたcomplete pseudo-Boolean algebraとなるが、そのinfinite joinを$\bigvee^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$で示す事にする。(infinite meetについては、$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \bigwedge^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$である) 一般に、$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \le \bigvee^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$である。

次に、$\mathcal{P}$のregular elementの全体を、$\mathcal{R}$で示す。($\mathcal{P}$のregular elementとは、$--I = I$なる元である)

$I \Rightarrow J$ において，$J \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるならば，$I \Rightarrow J \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ となる事より，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_{\kappa^+}$ である事がわかる。又 $\mathcal{Q}$ は Boolean であるので，$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ である。$\mathcal{R}$ は一般に，$\mathcal{P}$ の subalgebra ではないが，$\mathcal{R}$ は，次の operation によって Boolean algebra となる。

$$I \vee^* J = --I \vee J$$

$$I \wedge^* J = I \wedge J$$

$$-I = -I$$

$\mathcal{R}$ は又，complete Boolean algebra となる。実際，$\mathcal{R}$ は $\mathcal{Q}$ の minimal completion となる。$\mathcal{R}$ の infinite join, meet に関して，

$$\bigvee_{t \in T}^{*} I_t = -- \bigvee_{t \in T} I_t$$

$$\bigwedge_{t \in T}^{*} I_t = \bigwedge_{t \in T} I_t$$

である。

$\langle I_t : t \in T \rangle$ を $I_t \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$，$t \in T$ なるものとする。

Lemma 3. $A \in \bigvee_{t \in T}^{\kappa^+} I_t$ になるための必要十分条件は，次の条件を満足する $T_0 \subseteq T$ と，$(A_t)_{t \in T}$ が存在する事である。

i) $|T_0| \leq \kappa$

ii) $(\forall t \in T)(A_t \in I_t)$

iii) $(\forall t \in T - T_0)(A_t = \phi)$

iv) $\mathcal{D} \upharpoonright A = \bigvee^*_{t \in T}(\mathcal{D} \upharpoonright A_t)$

但し ここで $\mathcal{D} \upharpoonright A = \mathcal{D} \upharpoonright (-A)$ である

Theorem. 次の (a) – (d) は，同値である

(a) $\mathcal{D}$ は κ^+-saturated である

(b) $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$

(c) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ の dense element は $\mathbb{1}$ のみである．すなわち，I を任意の normal ideal (proper) としておくと，$I \le \mathcal{D} \upharpoonright A$ なる stationary set A が存在する．

(d) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ は Boolean algebra となる．

(Proof). (a) ⟺ (b) のみを証明すれば良い．今 $\mathcal{D}$ を κ^+-saturated とする．今，$I \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ を，任意の $A \subseteq \kappa$ に対して，$I \neq \mathcal{D} \upharpoonright A$ とする．さて，$\mathcal{F}$ を次の maximal family とする

i) $A \notin \mathcal{D}$, $A \in I$, $(\forall A \in \mathcal{F})$

ii) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{D}$-disjoint

$\mathcal{F}$ の存在に対しては，Zorn の補題より明らかである．$\mathcal{D}$ が，κ^+-saturated である事より，$|\mathcal{F}| \le \kappa$ となる．$(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ を $\mathcal{F}$ の enumeration とする．$A = \{\alpha < \kappa ; (\forall \xi < \alpha)(\alpha \notin A_\xi)\}$ とおくと，I が normal である事より，A は I-measure one

を持つ. しかるに, 仮定により, $I \neq \mathbb{O}\upharpoonright A$ である. 明らかに, $I \supseteq \mathbb{O}\upharpoonright A$ であるので, $B \in I$, $B \notin \mathbb{O}\upharpoonright A$ なる B が存在する. ゆえに, $B \cap A \in I$, $B \cap A \notin \mathbb{O}$ となる. $\mathcal{F}$ の maximality により, $B \cap A \cap A_\zeta \notin \mathbb{O}$ なる $\zeta < \kappa$ が存在する. , $A \cap A_\zeta \subseteq \{\alpha < \kappa ; \alpha \leq \zeta\}$ であるので, $A \cap A_\zeta$ は $\mathbb{O}$-measure zero となり. これは, $B \cap A \cap A_\zeta \notin \mathbb{O}$ に矛盾する.

逆に, $\mathbb{O}$ が, κ^+-saturated でないと仮定する. その時, $A_\xi \cap A_\zeta \in \mathbb{O}$, $\xi < \zeta < \kappa^+$ なる $\{A_\xi ; \xi < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - \mathbb{O}$ が存在する. $J = \bigvee^{\kappa^+}_{\xi<\kappa^+} (\mathbb{O}\upharpoonright A_\xi)$ とおく. しかるに, $\Omega = \mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるので, $J = \mathbb{O}\upharpoonright A$ なる $A \subseteq \kappa$ が存在する.

Lemma 3 により, $T \subseteq \kappa^+$ と, $(B_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ が存在する

i) $|T| \leq \kappa$,

ii) $B_\xi \in \mathbb{O}\upharpoonright A_\xi$, $\forall \xi < \kappa^+$.

iii) $B_\xi = \phi$, $\forall \xi \in \kappa^+ - T$

iv) $\mathbb{O}\upharpoonright A = \bigvee^{*}_{\xi<\kappa^+} (\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi)$.

$|T| \leq \kappa$ であるので, $\zeta \in \kappa^+ - T$ なる ζ が存在する. $\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta \leq J = \mathbb{O}\upharpoonright A$ であるので, $\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta = \bigvee^{*}_{\xi<\kappa^+} (\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi) \wedge (\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta)$. $\xi \in \kappa^+ - T$ に対しては, $\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi = \phi$, ゆえに, $(\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi) \wedge (\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta) = \mathbb{O}$. $\xi \in T$ に対しては, $\xi \neq \zeta$ であるので, $(\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi) \wedge (\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta) \leq (\mathbb{O}\upharpoonright A_\xi) \wedge (\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta) = \mathbb{O}$. ゆえに, $(\mathbb{O}\upharpoonright B_\xi) \wedge (\mathbb{O}\upharpoonright A_\zeta) = \mathbb{O}$, $\forall \xi < \kappa^+$ となる.

ゆえに、$\mathbb{I}\upharpoonright A_\xi = \bigvee^*_{\xi<\kappa^+}(\mathbb{I}\upharpoonright B_\xi)\wedge(\mathbb{I}\upharpoonright A_\xi) = \mathbb{I}$ となり、これは、$A_\xi \notin \mathbb{I}$ である事に反する。

上の定理により、non-stationary set の作る normal ideal が、κ^+-saturated でない事をいうには、dense な normal ideal を示す事になる。Solovay の前述した decomposition theorem は、結局の所、κ-saturated normal ideal が、non-stationary set の作る normal ideal に関して、dense である事を、示している。又、Solovay [ ] で、κ が、κ-saturated ideal を持てば、それは normal ideal を持つ事が、証明されているので、Namba [ ] の前述した結果が、上の定理により得られる。

さて、cardinal κ が、Π^1_1-indescribable であるとは、全ての κ の上の relation R と、全ての R, $<$ に関する Π^1_1-sentence φ に関して、

$$\langle\kappa;<,R\rangle\models\varphi \Rightarrow \exists\alpha<\kappa\,[\langle\alpha;<,R\upharpoonright\alpha\rangle\models\varphi]$$

が成立する事をいう。

Π^1_1-indescribable cardinal κ の subset A が、Π^1_1-indescribable である事も同様に ~~証明できる~~ 定義できる。

Lévy [ ], Baumgartner [ ] によって次の事が判っている。

$\{A \subseteq \kappa ;\ A$ は Π^1_1-indescribable でない$\}$ は、κ が Π^1_1-indescribable であれば、κ の上の normal ideal となる。また、それは non-stationary ideal に関して dense となる。ゆえに、次の系を得る。

系. κ が、Π^1_1-indescribable であれば、κ の上の non-stationary ideal は κ^+-saturated でない。

上の系により κ が ineffable cardinal であれば、κ の上の non-stationary ideal は κ^+-saturated でない。この事と、次の定理により、$V = L[J]$ (但し J はある measurable cardinal σ の上の σ-complete non-principal prime ideal) であれば、non-stationary sets よりなる normal ideal は κ^+-saturated でない事が判る。

定理 (Jensen, Devlin). $V = L[J]$ の仮定のもとでは、κ が ineffable である事と、$\neg KH(\kappa)$ とは同値である。

上の定理は、我々に次の問題を提起する。

"Non-stationary sets on κ の normal ideal が κ^+-saturated となる regular uncountable cardinal κ の存在より、0^+ の存在がいえるか？".

上の問題に関して、次の事は知られている。

定理 (Kunen) successor cardinal κ の上に、κ^+-saturated non-trivial ideal が存在すれば 0^+ の存在がいえる。

上の定理により、問題は limit cardinal の時になるが、それも、あまり large cardinal でない limit cardinal の時に問題となる。