数理解析研究所講究録
第336巻 1978年 135-149

証明論の教科書の中で超準解析を書くとすると

筑波大 数学系　本橋信義

超準解析を証明論の枠内で（すなわち，模型論を用いないで）考察し，"Non-standard Theory" と "Standard Theory" の間の証明論的な相互関係を調べたい。

§1. 証明論よりの準備.

L, L', … で第一階の述語論理を，$PC(L)$, $Fun(L)$, $Con(L)$ でそれぞれ L の述語記号の全体，L の関数記号の全体，L の個体定数記号の全体をあらわすものとする。但し，等号 $=$ は $PC(L)$ には入らない（論理記号として扱う）ことに注意されたい。第一階の述語論理 L, L' と L の中の Theory T，および L の中の指定された n 個の自由変数 $\bar{p} = \langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ が与えられたとき，

$$I_{\bar{p}} = \left\langle C(\bar{p}),\ V(\bar{p}, x),\ \{F_P(\bar{p}, \bar{x})\}_{P \in PC(L')},\ \{t_f(\bar{p}, \bar{x})\}_{f \in Fun(L')},\ \{t_c(\bar{p})\}_{c \in Con(L')} \right\rangle$$

が 論理 L' の Theory T の中への (n-ary) parametrical interpretation であるとは:

$C(\bar{p})$ は L の n-ary formula,

$V(\bar{p}, x)$ は L の $(n+1)$-ary formula,

$F_P(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)$-ary formula ($P \in PC(L')$ が m-ary のとき),

$t_f(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)$-ary term ($f \in Fun(L')$ が m-ary のとき),

$t_c(\bar{p})$ は L の n-ary term ($c \in Con(L')$),

で,

$$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C(\bar{p}),$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C(\bar{p}) \supset \exists x\, V(\bar{p}, x)],$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, \forall \bar{x}\, [C(\bar{p}) \wedge V(\bar{p}, \bar{x}). \supset V(\bar{p}, t_f(\bar{p}, \bar{x}))] \quad (f \in Fun(L')),$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C(\bar{p}). \supset V(\bar{p}, t_c(\bar{p}))] \quad (c \in Con(L'))$$

が成り立つこととする。ただし, $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ のとき, $V(\bar{p}, \bar{x})$ は $V(\bar{p}, x_1) \wedge V(\bar{p}, x_2) \wedge \cdots \wedge V(\bar{p}, x_m)$ をあらわすものとする。

I が L' の T の中への parametrical interpretation のとき, 上記の C, V, $F_P, \ldots$, $t_f, \ldots$, $t_c, \ldots$ をそれぞれ C_I, V_I, $P_I, \ldots$, $f_I, \ldots$, $c_I, \ldots$ であらわし,

$$I_{\bar{p}} = \langle C_I(\bar{p}), V_I(\bar{p}, x), \{P_I(\bar{p}, \bar{x})\}_{P \in PC(L')}, \{f_I(\bar{p}, \bar{x})\}_{f \in Fun(L')}, \{c_I(\bar{p})\}_{c \in Con(L')} \rangle$$

と表示する。

$I_{\bar{p}}$ が L' の T の中への p. interpretation のとき, L' の各 term t, 各 formula φ において $I_{\bar{p}}(t)$ および $I_{\bar{p}}(\varphi)$ を次のように定

義する：

$$I_{\bar{p}}(x) = x \quad (x \text{ は free variable})$$

$$I_{\bar{p}}(c) = c_I(\bar{p}) \quad (c \in Con(L'))$$

$$I_{\bar{p}}(f(t_1,\ldots,t_n)) = f_I(\bar{p}, I_{\bar{p}}(t_1),\ldots,I_{\bar{p}}(t_n)) \quad (f \in Fun(L'))$$

$$I_{\bar{p}}(t_1 \doteq t_2) = I_{\bar{p}}(t_1) \doteq I_{\bar{p}}(t_2)$$

$$I_{\bar{p}}(P(t_1,\ldots,t_n)) = P_I(\bar{p}, I_{\bar{p}}(t_1),\ldots,I_{\bar{p}}(t_n)) \quad (P \in PC(L'))$$

$$I_{\bar{p}}(\neg\varphi) = \neg I_{\bar{p}}(\varphi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \wedge \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \wedge I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \vee \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \vee I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \supset \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \supset I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\exists x\varphi(x)) = \exists x(V(\bar{p},x) \wedge I_{\bar{p}}(\varphi(x)))$$

$$I_{\bar{p}}(\forall x\varphi(x)) = \forall x(V(\bar{p},x) \supset I_{\bar{p}}(\varphi(x))) .$$

すると，

<u>Corollary</u> L' の $\bar{x}$-formula $\varphi(\bar{x})$ について，

$$\vdash_{L'} \varphi(\bar{x}) \Rightarrow T \vdash_{L} \forall\bar{p}\,\forall\bar{x}\,[C_I(\bar{p}) \wedge V_I(\bar{p},\bar{x}) . \supset I_{\bar{p}}(\varphi(\bar{x}))]$$

が成り立つことは明らかである。

特に，L が L' の sublogic ($L \subset L'$) のときに，L' の T の中への p. interpretation <u>I が L を保存する</u>とは：

(i) $V_I(\bar{p},x)$ は $x \doteq x$， (ii) $P_I(\bar{p},\bar{x}) = P(\bar{x})$ if $P \in PC(L)$，

(iii) $f_I(\bar{p},\bar{x}) = f(\bar{x})$ if $f \in Fun(L)$， (iv) $c_I(\bar{p}) = c$ if $c \in Con(L)$

が成り立つこととする。

Iが L を保存するときには，L の任意の $\vec{x}$-formula $\varphi(\vec{x})$ について，

$$T \vdash_L \forall \vec{p}\,[C_I(\vec{p}). \supset I_{\vec{p}}(\varphi(\vec{x})) \equiv \varphi(\vec{x})]$$

が成り立つことに注意されたい。

I が L′ の T の中への p. interpretation のとき，L′ の sentence φ が <u>I-valid in T</u> であるとは $T \vdash \forall \vec{p}\,[C_I(\vec{p}) \supset I_{\vec{p}}(\varphi)]$ が成り立つこととする。以上の概念を用いて我々は次の定義を得る。

<u>Definition</u>. L, L′ は第一階の述語論理で $L \subset L'$, T, T′ はそれぞれ L, L′ の中の Theory で $T \subset T'$ となっているものとする。<u>T′ が L を保存して局所的に T にうめこめる</u> とは，T′ の任意の有限個の公理 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ に対して，L を保存する L′ の T の中への parametrical interpretation I で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ がすべて I-valid in T になるものが存在することである。

この定義の下で，次の基本的な定理が得られる。

<u>Conservation Theorem</u>. T′ が L を保存して局所的に T にうめこめるならば，T′ は T の conservative extension である。

（証明）L の sentence φ について，$T' \vdash_{L'} \varphi$ を仮定して $T \vdash_L \varphi$ を示せばよい。$T' \vdash_{L'} \varphi$ を仮定すると compactness Theorem により T′ の有限個の公理 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が存在して，

$$\vdash_{L'} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n. \supset \varphi$$

が成り立つ。仮定から，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が I-valid in T になるような L を保存する L′ の T の中への parametrical interpretation が

取れる。3頁の Corollary から、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s . \supset \varphi)].$$

$I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s \supset \varphi)$ は定義から $I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_s) . \supset I_{\bar{p}}(\varphi)$

であるから、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C_I(\bar{p}) \supset (I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_s) . \supset I_{\bar{p}}(\varphi))].$$

所が $T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi_i)]$ $(i = 1, \ldots, s)$ で $T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C_I(\bar{p}) \supset \varphi \equiv I_{\bar{p}}(\varphi)]$

であるから、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C_I(\bar{p}) \supset \varphi]$$

φ に $\bar{p}$ が出てこないから、

$$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C_I(\bar{p}) \supset \varphi$$

一方、$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C_I(\bar{p})$ だから、ここから

$T \vdash_L \varphi$ を得る　（証明終り）

論理 L で formulate されている standard theory T に対して、L を拡張して得られる論理 L′ の中での T の拡張である non-standard theory T′ を考え、上の Conservation Theorem を用いて、T′ が T の conservative extension になっていることを示したい。以下の節でこれを実行していく。

$\boxed{\S 2.}$ first order logic with membership.

特定の1項述語記号 $S(*)$ と2項述語記号 $* \in *$ を固定し、"S" と "∈" をもった第一階の述語論理のみを考える。"S" と "∈" を用いて通常の集合論的概念は first order logic の中の

formula として ほとんど表現されているものとする：

例　$x \neq \phi$ は $S(x) \wedge \exists y(y \in x)$

$x \subset y$ は $S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z(z \in x \supset z \in y)$

⋮

etc.

各 logic L において, "S" を "set", "$\in$" を "membership" と考えて書かれているある種の集合論の公理系 $\Sigma(L)$ が次の条件 [I] および [II] をみたすように与えられているものとする。

[I], $\Sigma(L) \subset \Sigma(L')$ if $L < L'$.

[II]. $L \subset L'$ のとき, $\Sigma(L')$ の各公理の L への reduction はすべて $\Sigma(L)$ で証明可能である;

[注] L' の formula φ において φ の L への reduction とは, φ の中に出てくる, L に入っていない predicate symbol, function symbol および individual constant symbol をそれぞれ, L の formula および terms でおきかえて得られる L の formula のことである。

すると

Corollary. $L \subset L'$ のとき $\Sigma(L')$ は $\Sigma(L)$ の conservative extension である.

[証明]. φ は L の sentence で $\Sigma(L') \vdash_{L'} \varphi$ を仮定する.

compactness theorem から、$\Sigma(L')$ の有限個の公理 $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ が取れて、$\vdash_{L'} \varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_p \supset \varphi$ が成り立つ。$\varphi_1,\dots,\varphi_p,\varphi$ の中の L にない predicate symbols, function symbols, constant symbols をすべて、L の適当な formula 又は terms で一せいにおきかえて得られる formulas を $\hat{\varphi}_1,\dots,\hat{\varphi}_p,\hat{\varphi}$ とすると $\hat{\varphi}=\varphi$ であり、

$$\vdash_{L'} \hat{\varphi}_1\wedge\dots\wedge\hat{\varphi}_p \supset \varphi$$

が成り立つ。ここから $\vdash_L \hat{\varphi}_1\wedge\hat{\varphi}_2\wedge\dots\wedge\hat{\varphi}_p \supset \varphi$.

一方〔II〕より $\Sigma(L) \vdash_L \hat{\varphi}_1\wedge\dots\wedge\hat{\varphi}_p$ だから

$\Sigma(L) \vdash_L \varphi$ が得られる。（証明終り）

注意. $\Sigma(L)$ としてLでの Zermelo Fraenkel の集合論を取れば、上記の〔I〕,〔II〕が成り立つ。

§3 Universe の付加.

論理 L に新しい constant symbol $\mho$ を付加して得られる論理 $L(\mho)$ を考える。各 L と $\mho$ において、$L(\mho)$ での公理系 $Ax(L,\mho)$ を次の条件〔III〕,〔IV〕,〔V〕をみたすように対応させる。（注意, $Ax(L,\mho)$ は $\mho$ が L の universe をあらわすことを表現している。）.

〔III〕 $\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash \exists x(x\in\mho)\wedge S(\mho)$

$\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash \forall\bar{x}[\bar{x}\in\mho \supset f(\bar{x})\in\mho]$ $(f\in Fun(L))$

$\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash c\in\mho$ $(c\in Con(L))$

〔IV〕 $\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash \varphi^{\mho}$ for any $\varphi\in\Sigma(L)$.

[V]. $Ax(L,\mho)$ の各元 $\varphi_1(\mho),\ldots,\varphi_s(\mho)$ と L の各 sentence φ について、

$$\Sigma(L) \vdash \exists x(\varphi_1(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_s(x) \wedge \varphi^x \equiv \varphi). ,$$

ここで φ^x は φ の x による relativization とする。

[I]〜[V] の下で我々は次の定理を得る。

<u>Theorem 1.</u> L の任意の sentence φ について

$$\Sigma(L) \vdash_L \varphi \iff \Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash_{L(\mho)} \varphi^{\mho}$$

[証明] (⇒). $\Sigma(L)\vdash\varphi$ を仮定する。すると $\Sigma(L)$ の有限個の元 $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ で $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash_L \varphi$ となるものが取れる。

Relativization の一般論より

$$\exists x(x\in\mho), \{\forall x[x\in\mho \supset f(x)\in\mho]\}_{f\in Fn(L)}, \{c\in\mho\}_{c\in Con(L)},$$

$$\varphi_1^{\mho},\ldots,\varphi_n^{\mho} \vdash_{L(\mho)} \varphi^{\mho}$$

ここで [III],[IV] より $\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash_{L(\mho)} \varphi^{\mho}$.

(⇐) $\Sigma(L(\mho)), Ax(L,\mho) \vdash_{L(\mho)} \varphi^{\mho}$ を仮定すると [I] より

$\Sigma(L(\mho))$ の元 $\varphi_1(\mho),\ldots,\varphi_k(\mho)$ と $Ax(L,\mho)$ の元 $\psi_1(\mho),\ldots,\psi_s(\mho)$ で

$$\Sigma(L), \varphi_1(\mho),\ldots,\varphi_k(\mho), \psi_1(\mho),\ldots,\psi_s(\mho) \vdash_{L(\mho)} \varphi^{\mho}$$

のなりたつものが取れる。$\mho$ を L の free variable a で一せいにおきかえて、

$$\Sigma(L), \varphi_1(a),\ldots,\varphi_k(a), \psi_1(a),\ldots,\psi_s(a) \vdash_L \varphi^a$$

が得られる。所が [II] より

$$\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a) \wedge \cdots \wedge \psi_l(a)$$

だから、 $\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a) \wedge \cdots \wedge \psi_l(a) . \supset \varphi^a$ が成り立つ。

よって $\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a) \wedge . \wedge \psi_l(a) \wedge \varphi^a \equiv \varphi . \supset \varphi$ を得る。

$\Sigma(L)$, φ に a が出てこないから

$$\Sigma(L) \vdash_L \exists x(\psi_1(x) \wedge \cdots \wedge \psi_l(x) \wedge \varphi^x \equiv \varphi) \supset \varphi$$

従って [V] より $\Sigma(L) \vdash_L \varphi$ を得る . (証明終り)

<u>注意</u> Theorem 1 において、φ としては bounded formula のみを考えるのだが、条件 [IV] の代りに

[IV]′ $\quad Ax(L, \sigma) \vdash_{L(\sigma)} \forall x \forall y [x \in y \wedge y \in \sigma . \supset x \in \sigma]$

を用いる方がよい。つまり、[I], [II], [III], [IV]′, [V] の下で、φ が bounded sentence のとき、

$$\Sigma(L) \vdash \varphi \iff \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \varphi^\sigma$$

∵) ($\Leftarrow$) は上の証明と同じ

($\Rightarrow$) は $\Sigma(L) \vdash \varphi$ より $\Sigma(L(\sigma)) \vdash \varphi$

一方 $Ax(L, \sigma) \vdash \varphi \equiv \varphi^\sigma$ だから

$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \varphi^\sigma$ (Q.E.D.)

通常の数学の命題は、"$\in$" を含んだ論理式では必ず bounded form で表現されると考えられるので、[IV] より [IV]′ の方が natural であると考えられる。

$\boxed{\S 4}$ Non-Standard Theory.

$L(\sigma)$ の拡張になっている first order logic L^* を取り，L^* の中での Theory Nt が次の条件［VI］をみたしているとする．

［VI］ Nt は $L(\sigma)$ を保存して局所的に $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ にうめこめる

すると Conservation Theorem から次の定理が得られる．

<u>Theorem 2</u> $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,\sigma)$ は $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ の conservative extension である．

（証明） Conservation theorem により $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,\sigma)$ が $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ の中に $L(\sigma)$ を保存して局所的にうめこめることを示せばよい。

$\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,\sigma)$ の中の有限個の formulas $\varphi_1, \ldots \varphi_l, \sigma_1, \ldots \sigma_p, \psi_1, \ldots, \psi_q$ を $\varphi_i \in \Sigma(L^*)$, $\sigma_j \in Nt$, $\psi_k \in Ax(L,\sigma)$ となるように取る。［VI］より $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ が I-valid in $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ となるような $L(\sigma)$ を保存する L^* の $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ の中への parametrical interpretation I が取れる. $\psi_1, \ldots \psi_q$ は $L(\sigma)$ の sentences で I は $L(\sigma)$ を保存するから，

$$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma) \vdash \forall \bar{p}[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\psi_k) \equiv \psi_k] \quad (k=1,\ldots,q)$$

でしかも $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma) \vdash \psi_k \quad (k=1,\ldots,q)$

よって $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma) \vdash \forall \bar{p}[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\psi_k)], \ (k=1,\ldots,q)$

すなわち $\psi_1, \ldots \psi_q$ はすべて I-valid in $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L,\sigma)$ である

また I が $L(\sigma)$ を保存することから $I_p(\varphi_1), \ldots, I_p(\varphi_\ell)$ は
それぞれ $\varphi_1 \ldots \varphi_\ell$ の $L(\sigma)$ の中の reduction $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_\ell$ に
等値になる。従って [II] より

$$\Sigma(L(\sigma)),\ Ax(L.\sigma) \vdash I_p(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge I_p(\varphi_\ell)$$

従って $\varphi_1 \ldots \varphi_\ell$ も I-valid in $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L.\sigma)$ である。

以上から $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L.\sigma)$ は $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L.\sigma)$ の中に
$L(\sigma)$ を保存して局所的にうめこまれることになる（証明終り）

Theorem 1 と Theorem 2 を用いて我々は non-standard theory と standard theory の間の関係を次のように表現することが出来る。

logic L で formulate された theory T を考える。T には set theory が付加されていると考えるので、standard theory Tの公理は正確には $\Sigma(L), T$ と表現できる。この standard theory $\Sigma(L), T$ の non-standard theory としては $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L.\sigma), T^\sigma$ を考える。このとき [I]〜[III] のすべては Theorem 1 と Theorem 2 より、L の任意の sentence φ について

$$\Sigma(L),\ T \vdash_L \varphi$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Sigma(L^*),\ Nt,\ Ax(L.\sigma),\ T^\sigma \vdash_{L^*} \varphi^\sigma$$

が成り立つことになる。

我々は個々の具体的な T と、それを扱う目的によって都合の

よい Nt を取って議論すればよい。その例を1つあげて、この話を終りにする。

[例] Σ(L) として L で formulate された Zermelo Fraenkel の集合論（axiom of choice を入れる）を取る。この Σ(L) について [I] [II] が成り立つことは明らか。また Ax(L,σ) は [III], [IV], (V) が成り立つように取られているものとする。

論理 L の各 predicate symbol P に対して同じ変数の個数をもつ新しい predicate symbol P^* を用意し、$L^* = L(\sigma) \cup \{P^*\}_{P \in PC(L)}$ とする。L(σ) の各 formula φ に対して その中の P... を P^*... でおきかえて得られる formula を φ^* であらわすことにする。

L の formula $\varphi(u,v,\bar{x},y)$ に対して、

$$Lsa(\varphi)(y,\bar{x}) \text{ は } \forall z \in P_\omega(y)\, \exists v \in \sigma\, \forall u \in z\, \varphi^\sigma(u,v,\bar{x},y)$$

$$Gsa(\varphi)(y,\bar{x}) \text{ は } \exists v \in^+ \sigma\, \forall u \in y\, (\varphi^\sigma(u,v,\bar{x},y))^*$$

とする。但し、ここで $P_\omega(y)$ は y の finite subset の全体をあらわす term とする。Nt としては、次の sentences 全体とする。

$$\begin{cases} \exists z\,(S(z) \wedge \forall x\,(x \in^+ \sigma \equiv x \in z)) \\ \forall x\, \forall y\,(x \in^+ \sigma \wedge y \in^+ x. \supset y \in^+ \sigma) \\ \forall x\,(x \in \sigma \supset x \in^+ \sigma) \\ \forall \bar{x}\,[\bar{x} \in \sigma \supset \varphi^\sigma(\bar{x}) \equiv (\varphi^\sigma(\bar{x}))^*] \text{ for any formula } \varphi(\bar{x}) \text{ in } L. \\ \forall \bar{x}\, \forall y\,[\bar{x} \in \sigma \wedge y \in \sigma \wedge Lsa(\varphi)(y,\bar{x}). \supset Gsa(\varphi)(y,\bar{x})] \text{ for} \\ \qquad \text{any formula } \varphi(u,v,\bar{x},y) \text{ in } L. \end{cases}$$

すると通常の "ultrapower" を formalに扱うことにより 四つが成り立つことが示せる. 以下. その概略を説明しよう.

話を簡単にするために, Lには関数記号と述語記号を入れないものとし, $\Sigma(L(\sigma))$ の中では comprehension operator を自由に使って, $P(a)$ (aの power set), $P_\omega(a)$ (aの finite subset の全体) といった term が省略記号として扱えるようにしておく.

以下. notation は通常の公理的集合論のそれに従うものとして, $L(\sigma)$ での次のような terms 及び formula を考える.

$C(a)$; "aは σ 上の regular ultrafilter" i.e. aは $P_\omega(\sigma)$ 上の ultrafilter で各 $i \in \sigma$ に対して $\hat{i} \in a$ となる, ここで $\hat{i} = \{s \in P_\omega(\sigma) \mid i \in s\}$.

$eq(a, x, y)$; $\exists u \in a \, \forall i \in u \, (x'i = y'i)$

$V(a, x)$; $x \subset {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \wedge \exists u \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \, \forall v \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \, (v \in x \equiv eq(a, u, v))$

$j(a, \bar{x}) = \{v \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \mid \exists u \in a \, \forall i \in u \, (v'i = x)\}$

とすると

$$\Sigma(L(\sigma)) \vdash \forall a \forall x \, [C(a) \wedge x \in P(\sigma) . \supset V(a, j(a, x))]$$

$$\Sigma(L(\sigma)) \vdash \text{"} j \text{ は } P(\sigma) \text{ から } V(a, *) \text{ への injection"}$$

が成り立つ. 次に $L(\sigma)$ の各 formula $\varphi(\bar{x})$ に対して

$$\tilde{\varphi}(a, \bar{x}) = \exists \bar{y} \in \bar{x} \, \exists u \in a \, \forall i \in u \, (\varphi(\bar{y}'i))$$

と定義する. そこで

$$J = \langle C(a), V(a, x), \{\tilde{R}(a, \bar{x})\}_{R \in P(L)}, \{j(a, \sigma)\} \rangle$$

とすると J は $L(\bar{\sigma})$ の $\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma)$ の ψ への parametrical interpretation であり、この J について、次の Łoś の定理が成り立つ。

<u>Theorem (Łoś)</u>. L の任意の formula $\varphi(\bar{x})$ について

$$\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x} [C(a) \wedge \bar{x} \,\hat{\in}_a\, j(a.\bar{\sigma}). \supset J_a(\varphi^{\sigma}(\bar{x})) \equiv \widetilde{\varphi^{\sigma}}(a.\bar{x})]$$

ここから

<u>Corollary 1</u> L の任意の formula $\varphi(\bar{x})$ について

$$\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x} [C(a) \wedge \bar{x} \in \bar{\sigma}. \supset J_a(\varphi^{\sigma}(j(a.\bar{x}))) \equiv \varphi^{\sigma}(\bar{x})].$$

特に φ が sentence のときは、

$$\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma) \vdash \forall a [C(a) \supset J_a(\varphi^{\sigma}) \equiv \varphi^{\sigma}].$$

<u>Corollary 2</u> L の formula $\varphi(u.v.\bar{x}, y)$ について、

$$\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x} \forall y [C(a) \wedge \bar{x} \in \bar{\sigma} \wedge y \in \bar{\sigma} \wedge Lsa(\varphi)(y.\bar{x}). \supset. \exists v (V(a.v) \wedge v \,\hat{\in}_a\, j(a,\bar{\sigma}) \wedge \forall u \in y\, J_a(\varphi^{\sigma}(j(a,u), v, j(a,\bar{x}), j(a.y))))]$$

そこで、L^* の $\Sigma(L(\bar{\sigma})), Ax(L.\sigma)$ への parametrical interpretation I を次のように定める。

$$C_I(a,b,p) \fallingdotseq C(a) \wedge P(\sigma) \subset b \wedge \exists c (S(c) \wedge \forall x (x \in c \equiv V(a.x)) \wedge (p : b \xrightarrow{bi} c) \wedge \forall x \in P(\sigma) (j(a.x) = p'x).$$

$$V_I(a. \cancel{b}\, p. x) = \text{“} x \doteq x \text{”}$$

$$P_I(a.b,p.\bar{x}) = P(\bar{x}) \qquad (P \in PC(L))$$

$\underline{P}^{*}_{I}(a.b.p.\bar{x})$ は $\bar{x} \in b \wedge \hat{\underline{P}}(a, p(\bar{x}))$ $(\underline{P} \in P(L))$

$\upsilon_{I}(a.b.p)$ は "υ"

($p(\bar{x})$ は $p'x_1, \ldots, p'x_n$)

とすると この I が $L(\upsilon)$ を保存する NF の $\Sigma(L(\theta))$, $A^{*}(L, \upsilon)$ の中への parametrical interpretation になる. 従って 〔VI〕 が この NF については成り立つことになる.