数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 41-51

2階の弱双曲型方程式に対するコーシー問題
ーGevreyクラスでのー

愛媛大 工　　猪狩勝寿

R^d の open set Ω で定義された函数 $\varphi(x)\in C^\infty$ がクラス $\gamma^{(\alpha)}_{loc}$ に属するとは，任意の compact set $K\subset\Omega$ に対し，定数 ρ および C が存在して，

$$(1)\qquad \left|\partial_x^p\varphi(x)\right| \leq \frac{|p|!^\alpha}{\rho^{|p|}}C \quad , \qquad x\in K$$

をすべての $p=(p_1,\cdots,p_d)$ に対し満すことである。特に (1) が $\forall x\in\Omega$ に対して成立するなら，$\varphi(x)$ は $\gamma^{(\alpha)}$ に属するという。また $\varphi(x)\in\gamma^{(\alpha)}$ の support がコンパクトであるとき，$\varphi(x)\in\gamma_0^{(\alpha)}$ と記す。

<u>歴史</u>　Y. Ohya [1] は偏微分方程式

$$(2)\qquad \partial_t^m u + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m\\ j<m}} a_{\alpha j}(x,t)\partial_x^\alpha\partial_t^j u = f(x,t),$$

$(x,t)\in\Omega=\mathbb{R}^n\times[0,h]$, $h>0$, に対するコーシー問題を考察

し，特性根が real かつ根の重複度が一定なる仮定の下に，

(3) ・このコーシー問題が $\gamma^{(\alpha)}_{loc}$，$1<\alpha<\frac{m}{m-1}$，で適切である．
・有限依存領域が存在する．

を示した。その際，方程式の低階の項には条件が課せられておらず，クラス $\mathcal{E}$ でのコーシー問題と状況が異なっている。

その後，Leray－Ohya [2] は方程式の主部が strictly hyperbolic operators の積になっている場合を考察し，結果を精密化した。また Steinberg[3] は，主部が1階の hyperbolic pseudo differential operators の積に分解される場合を考察した。

以上において考察されたのは，特性根が "smooth" な場合であると言える。

<u>問題</u>　特性根が smooth にならない場合でも，特性根が real であることを仮定すれば，(3) が従うか？

この問題の部分的解決が既に与えられている。Beals [4] は，方程式の係数が t に依存せず，かつ特性根は real で（$\xi\neq 0$ で）0 にならないという仮定の下で (3) を示した。また，Ivrii [5] は方程式の主部の係数が analytic でかつ特性根が実であるならば (3) が従うことを示した。

さて得られた結果を以下に述べよう。我々は2階の方程式のみを考察する。　2階の偏微分方程式

(E)　$$L[u] = \delta^2 u - \partial_i a^{ij} \partial_j u - b^i \partial_i u - cu = f(x,t),$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,h]$, $h>0$, を考えよう。　ここで, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\delta = \partial_t + a^i \partial_i + b^0$, $a^{ij} = a^{ji}$ であり, 同じ添字に対する和の記号は省略している。

次の (A_1), (A_2) を仮定する。

仮定 (A_1): 次の (i), (ii), (iii) が満されるとする;

(i) 係数 $\in \gamma^{(\alpha)}(\Omega)$,

(ii) $a^i(x,t)$, $a^{ij}(x,t)$ は real-valued,

(iii) $a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \geq 0$, for $\forall (x,t,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

仮定 (A_2): $[\delta, \partial_i a^{ij} \partial_j] = \partial_i b^{ij} \partial_j +$ 低階, $b^{ij} = b^{ji}$, と表わしたとき, 次の (iv) 又は (iv') が満たされるものとする;

(iv) 定数 $A\ (\geq 0)$ が存在し, $\forall (x,t,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ に対し,

$$b^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \geq -A\ a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j,$$

(iv') 定数 $A\ (\geq 0)$ が存在し, $\forall (x,t,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ に対し,

$$b^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \leq A\ a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j.$$

このとき, 次の定理が成り立つ。

定理　(A_1), (A_2) を仮定する。また $1<\alpha<2$ とする。すると，任意の $f(x,t)\in\gamma^{(\alpha)}_{loc}(\Omega)$ および任意の初期データ $\big(u(x,0),\ \partial_t u(x,0)\big)\in\gamma^{(\alpha)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ に対し，Ω で (E) を満す解 $u(x,t)\in\gamma^{(\alpha)}_{loc}(\Omega)$ が存在し，解は $\mathcal{E}^2$ で一意的である。更に有限な依存領域が存在する。

注意　C_{x_0,t_0}, $(x_0,t_0)\in\Omega$, は次のように定義される backward cone とする：

$$C_{x_0,t_0}=\{(x,t)\in\Omega\ ;\ \mu|x_0-x|<t_0-t\}$$

ここで，$\mu^{-1}=\sup_{(x,t)\in\Omega,\ |\xi|=1}\left|a^i(x,t)\xi_i+\sqrt{a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j}\right|$. すると，定理の後半は次のことを意味する：$u(x,t)\in\mathcal{E}^2$ がある $(x_0,t_0)\in\Omega$ に対し，$L[u]=0$ in C_{x_0,t_0}, $u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0$ on $C_{x_0,t_0}\cap\{t=0\}$ を満すなら，$u(x,t)=0$ in C_{x_0,t_0} が従う。

注意　b^{ij} を具体的に書けば，

$$(4)\qquad b^{ij}=(a^{ij})'_t+a^k(a^{ij})'_{x_k}-(a^i)'_{x_k}a^{kj}-a^{ik}(a^j)'_{x_k}.$$

注意　$0<t_1\le h$ とし，backward コーシー問題

$$(5)\qquad L[u]=f\quad\text{in } \mathbb{R}^n\times[0,t_1]\ ;\quad u\big|_{t=t_1}=\varphi(x),\ \ \partial_t u\big|_{t=t_1}=\psi(x)$$

を考えよう。変数変換：$y=-x$, $s=t_1-t$, により (5) は

$$(5') \qquad \mathcal{L}[v] = \tilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, t_1]; \quad v|_{s=0} = \tilde{\varphi}(y), \quad \partial_s v|_{s=0} = \tilde{\psi}(y)$$

に変換される。ここで $\mathcal{L}(y, s; \partial_y, \partial_s) = L(-y, t_1 - s; -\partial_y, -\partial_s)$ である。L が (i), (ii), (iii), (iv) (又は (iv')) を満すなら $\mathcal{L}$ は (i), (ii) (iii), (iv') (又は (iv), respectively) を満すことは容易に確かめられる。故に (A_1), (A_2) を L に対して仮定すれば、定理によりコーシー問題 (5') が、従って backward コーシー問題 (5) が $\gamma^{(\alpha)}_{loc}$, $1 < \alpha < 2$, で well-posed であることがわかる。

例 1　偏微分方程式 (E) で特に $\delta = \partial_t$ の場合:

$$(6) \qquad \partial_t^2 u - \partial_i a^{ij} \partial_j u - b^0 \partial_t u - b^i \partial_i u - cu = f,$$

$(x, t) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times [0, h]$, $h > 0$, を考え, $a^{ij} = a^{ij}(x)$ (tに依存しない) を仮定しよう。このとき (4) より明らかに, $b^{ij}(x,t) \equiv 0$ である。だからこの場合は, (A_1) を仮定すれば, (6) に対するコーシー問題は $\gamma^{(\alpha)}_{loc}$, $1 < \alpha < 2$, で well-posed であることが定理よりわかる。($\because$ (A_2) は自動的に満される)。

例 2　$\mathbb{R}^1 \times [0, h]$, $h > 0$, で

$$(7) \qquad \partial_t^2 u - \partial_x a \partial_x u - b^0 \partial_t u - b \partial_x u - cu = f$$

を考えよう。係数 $\in \gamma^{(\alpha)}$ とする。簡単のために次の 2 つの場合を考えよう。(1): $a(x, t) = \varphi(x) t^k$; $\varphi(x) \geq 0$, $k (\geq 0)$ は整

数, (ロ): $a(x,t) = \varphi(x)(h-t)^k$; $\varphi(x) \geq 0$, $k\,(\geq 0)$ は整数.
(イ) の場合, 仮定 (A_2) の (iv) が満され, (ロ) の場合は (iv′) が満されることは明らかである. 故に (イ), (ロ) いずれの場合も, (7) に対するコーシー問題は $\gamma^{(\alpha)}_{loc}$, $1<\alpha<2$, で well-posed である.

証明の方針

まず, L^2 の意味での Gevrey 函数族 $\Gamma^{(\alpha)}$, $\Gamma^{(\alpha)}[0,h]$ を導入しておこう. $\varphi(x) \in \Gamma^{(\alpha)}$ とは, $\varphi(x) \in \mathcal{D}^{\infty}_{L^2}$ であり, かつ定数 ρ および C が存在して, 任意の p に対し $\|\partial^p_x \varphi(x)\| \leq (|p|!^{\alpha}/\rho^{|p|})\,C$ を満すことである. また $\varphi(x,t) \in \Gamma^{(\alpha)}[0,h]$ とは, $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}^{\infty}_{L^2}[0,h]$ であり, かつ　　定数 ρ, C が存在して, 任意の p, k に対し $\sup\limits_{0\leq t\leq h} \|\partial^p_x \partial^k_t \varphi(\cdot,t)\| \leq C\,(|p|+k)!^{\alpha}/\rho^{|p|+k}$ を満すことである. ソボレフの lemma により, $\gamma^{(\alpha)}_0 \subset \Gamma^{(\alpha)} \subset \gamma^{(\alpha)}$, および $\gamma^{(\alpha)}_0(\Omega) \subset \Gamma^{(\alpha)}[0,h] \subset \gamma^{(\alpha)}(\Omega)$ であることがわかる.

次の存在定理が証明される.

定理(Ex). (A_1), (A_2) を仮定し, $1<\alpha<2$ とする. すると任意の $f \in \Gamma^{(\alpha)}[0,h]$ および任意の初期データ $(u(x,0), \partial_t u(x,0)) \in \Gamma^{(\alpha)}$ に対し, 方程式 (E) の解 $u(x,t) \in \Gamma^{(\alpha)}[0,h]$ が存在する.

証明は逐次近似法による. $L_0 = \partial_t^2 - \partial_i a^{ij} \partial_j$, $M = b^i \partial_i + c$ とおけば, 方程式 (E) は

(E) $$L_0[u] = f + M[u]$$

となる. $u_i(x,t)$, $i \geq 1$, を次のように定める:

(8) $$\begin{cases} L_0[u_1] = f, & \text{初期データ } 0, \\ L_0[u_i] = M[u_{i-1}], & \text{初期データ } 0, \quad i \geq 2. \end{cases}$$

実際次々に定まることは, 次の定理 (Oleinik [6]) による:「(A_1), (A_2) を仮定する (係数 $\in \mathcal{B}$ でよい). すると方程式

(9) $$L_0[u] = f$$

に対するコーシー問題は $\mathcal{D}^{\infty}_{L^2}$-適切である.」 $\delta = \partial_t$ の場合, この定理は, Oleinik [6] の低階のない場合である. そうでない場合も, わずかな修正をすれば, [6]と同じ方針で証明される.

明らかに, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x,t)$ は初期データ 0 の (E) の形式解を与えるから, 問題はその収束を吟味することにある. (A_2) の (iv) を仮定するか, (iv′) を仮定するかにより, その手法は異なる. 簡単のために, (iv) が仮定される場合だけ考えよう.

<u>逐次評価</u> $\kappa_{i,l+r}(t)$ を次式で定義する:

(10) $$\kappa_{i,l+r}(t) = \frac{t^i}{i!} \frac{(l+r)!^{\alpha}}{\rho^{l+r}} C\, e^{k\gamma(l+r+1)t} (1+\beta t)^{l+r+1},$$

ここで，i, l, r は整数を値 (≥ 0) にもつパラメーター，ρ と C はある定数，k, γ, β は適当に定められた定数である．また $\max_{|p|=l} \|\partial_x^p f(\cdot, t)\| = \|f(\cdot, t)\|_l$ と表わす．すると次の逐次評価がなりたつ：

「(A_1) および (A_2) の (iv) を仮定する$\overbrace{}^{(\alpha \geq 1)}$．すると，(9) の右辺 f が

(11) $$\|f(\cdot, t)\|_l \, e^{\gamma(l+1)t} \leq \kappa_{i, l+r}(t)$$

を満すならば，(9) の 0-initial data をもつ解 $u(x, t)$ は

(12) $$\|u(\cdot, t)\|_l \, e^{\gamma(l+1)t} \leq K_1 \, \kappa_{i+2, l+r}(t)$$

を満す．ここで K_1 は i, l, r に依存しない定数である．」

さらに次のことが言える：

「$u(x, t)$ が

(13) $$\|u(\cdot, t)\|_l \, e^{\gamma(l+1)t} \leq \kappa_{i, l+r}(t)$$

を満すならば，($\alpha \geq 1$ ならば)

(14) $$\|M[u](\cdot, t)\|_l \, e^{\gamma(l+1)t} \leq K_2 \, \kappa_{i, l+r+1}(t)$$

が従う．ここで $M = b^i \partial_i + c$，$b^i, c \in \gamma^{(\alpha)}(\Omega)$，$K_2$ は i, l, r によらない定数である．」

上記の2つの逐次評価を用いれば，形式解 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t)$ の

収束が確かめられる。

<u>解の存在</u>　方程式 (E) において, $f \in \Gamma^{(\alpha)}[0,R]$ だから定数 ρ, C が存在して

(15) $$\|\partial_x^p f(\cdot,t)\| \le \frac{|p|!^{\alpha}}{\rho^{|p|}} C$$

を満す。よって明らかに $\|\partial_x^p f(\cdot,t)\| e^{\gamma(\ell+1)t} \le \kappa_{0,\ell}(t)$, $\ell=|p|$.

上記の2つの逐次評価を交互に繰り返し用いれば,

(16) $$\|u_i(\cdot,t)\|_\ell \, e^{\gamma(\ell+1)t} \le K_2^{i-1} K_1^{i} \, \kappa_{2i,\ell+i-1}(t)$$

が導かれる。故に

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i(\cdot,t)\|_\ell \le \sum_{i=1}^{\infty} K_2^{i-1} K_1^{i} \, \kappa_{2i,\ell+i-1}(t).$$

$\rho^{-1} e^{k\gamma h}(1+\beta h) = B_1$, $K_2 K_1 B_1 = B_2$, $K_1 C e^{k\gamma h}(1+\beta h) = B_3$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i(\cdot,t)\|_\ell \le t^2 B_3 B_1^{\ell} \sum_{i=1}^{\infty} (B_2 t^2)^{i-1} \frac{(\ell+i-1)!^{\alpha}}{(2i)!}$$

$$\le t^2 B_3 (2^{\alpha} B_1)^{\ell} \, \ell!^{\alpha} \sum \left(\frac{2^{\alpha}}{4} B_2 t^2\right)^{i-1} (i-1)!^{\alpha-2},$$

が容易に確かめられる。故に $1 \le \alpha < 2$ ならば, $0 \le t \le R$ で右辺は一様収束するから, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x,t) = u(x,t)$ とおけば,

(17) $$\|u(\cdot,t)\|_\ell \leq \text{const.}\,(2^\alpha B_1)^\ell\, \ell!^\alpha\, t^z.$$

これで，$u(x,t)$ が x に関しては，order α の Gevrey 函数であることもわかった。(x,t) の函数として，$u(x,t)$ が $\Gamma^{(\alpha)}[0,h]$ に属することの証明は略す。

証明の 2-nd step は有限な依存領域の存在を示すことである．それが証明されれば，1の分割の手法により，$\gamma^{(\alpha)}_{loc}$ での解の存在が示される。

逐次評価の証明に関しては言及しなかったが，論文（Cauchy problem in Gevrey classes for non-strictly hyperbolic equations of second order, to appear）を参照されたい．

（終）

参考文献

[1] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 268–286.

[2] J. Leray and Y. Ohya : Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, (1964), C.N.R.B.

[3] S. Steinberg : Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily

strictly hyperbolic, J. Diff. Eq., 17 (1975), 119–153.

[4] R. Beals : Hyperbolic equations and systems with multiple characteristics, Arch. Rat. Mech. Anal., 48 (1972), 123-152.

[5] V. Ja. Ivrii : Correctness of the Cauchy problem in Gevrey classes for non-strictly hyperbolic operators, Math. USSR Sbornik, 25 (1975), 365–387.

[6] O. A. Oleinik : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 569-586.