数理解析研究所講究録
第341巻 1978年 41-54

複素数値の位相函数とその応用

東大・大学院　田島慎一

$P(x\,D_x)$ は $M=\mathbb{R}^{n+1}$ 上の A-係数線型偏微分作用素。$N=\{x_{n+1}=0\}$ は P に関し非特性的。$X=\mathbb{C}^{n+1}$, $Y=\mathbb{C}^n$ をそれぞれ M, N の複素近傍とする。このとき

$$P(x\,D_x)u=0 \quad x_{n+1}>0, \quad \frac{\partial^l u}{\partial x_{n+1}^l}(x)\Big|_{x_{n+1}\to+0}=\mu_l(x') \quad l=1,\cdots,p$$

なる境界値問題を超函数の立場で考えます。

以後 P の複素化 $P(z\,D_z)$ の特性多様体 $\mathrm{Car}(P)$ は次の条件をみたすものを考える。

(1) 複素の特性多様体 $\mathrm{Car}(P)$ は正則．multiplicity は一定．

(2) $\mathrm{Car}(P)\cap T^*X\times_X Y$ は T^*X の部分 symplectic 多様体の構造をもつ。

この時，複素領域においては，浜田［1］，［ ］及び P. Pallu De La Barriere et. P. Schapira［13］に明らかにされたように phase function が決定的役割を果たしている

河合〔7〕では，P が更に strictly hyperbolic の条件をみたしているとき，初期値問題の基本解を，超函数として実現している。その際の phase は実数値函数であったことに注意しよう。又，SKK では，positive type の phase を使って，超局所可解性，解析性等を論じている。

境界値問題では positive type でない phase をも扱う必要がある。§.1 では complex phase について述べ，§.2 では境界値問題の Poisson 核の構成について述べる。

なお，最近 Anders Melin と Johannes Sjöstrand〔10〕〔11〕が，Fourier 積分作用素の立場から，同様の結果を得ていることをつけ加えておく。

§.1.

X 上の正則函数 φ の零点集合を K とおく。更に $\partial\varphi \neq 0$ on K が成りたっている時，柏原，Schapira〔5〕に従って

$\mathcal{O}'_{K|X} = \mathcal{D}_X^\infty \operatorname{Log}\varphi$ と定める。この節では，$\mathcal{O}'_{K|X}$ が $M_+ = \{x \in M \mid x_{n+1} > 0\}$ 上，超函数として realify されている時に，（φ に適当な条件を加えて）$\mathcal{O}'_{K|X}$ を $\overline{M_+}$ 上に support をもつように M 上に realify する方法を与える。

また，その延長の方法が，境界値問題の立場からみて，“標準的延長”であることを証明する。

定義 1.1. 柏原・河合〔3〕. : K が X の closed set のとき、$K-M$ の $\tilde{M}_X = X-M \sqcup S_M X$ の中での閉包 $\overline{K-M}$ と $S_M X$ の共通部分を the normal set of K along M といい $S_M K$ で表わします。すなわち

$$S_M K = S_M X \cap \overline{K-M} \quad \text{である。}$$

$x_0 \in M$ において non-singular な超曲面 $K = \{z \in X \mid \varphi(z) = 0\}$ が $\varphi(x_0) \neq 0$ ならば明らかに $(S_M K)_{x_0} = \phi$ ですが、SKK あるいは三輪〔12〕により次が知られています。

命題 1.2 $\varphi(x) = f(x) + \sqrt{-1}\, g(x)$ 、$f(x)$ 及び $g(x)$ は M 上実数値をとり、$df(x_0) \neq 0$ として一般性を失わない。$\varphi(x_0) = 0$ 。このとき次の (1)〜(4) がなりたつ。

(1) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \equiv 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{(x_0, u_1 \tfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial}{\partial y_{n+1}}) \,\middle|\, u_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) = 0\right\}$$

(2) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \geqq 0$. $g(x) \not\equiv 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{(x_0\ u_1 \tfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial}{\partial y_{n+1}}) \,\middle|\, u_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \leqq 0\right\}$$

(3) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \leqq 0$ $g(x) \not\equiv 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{(x_0\ u_1 \tfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial}{\partial y_{n+1}}) \,\middle|\, u_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + u_{n+1} \tfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \geqq 0\right\}$$

(4) x_0 の近傍 U を充分小さくとっても (1)〜(3) のいずれも成立しない時

$$(S_M K)_{x_0} = (S_M X)_{x_0}.$$

命題1.2 を得れば $\mathcal{O}^{1}_{K|X}$ をM上の超函数として実現することはφが(1)〜(3)をみたすならば容易です。しかし $\mathcal{O}^{1}_{K|X}$ を $\overline{M}_+$ に台をもつようにM上に実現することを考える時は $S_M K$ では不適当なので $S_{\overline{M}_+}K$ なる集合を導入します。

定義1.3. Xの closed set K に対して $x \in \overline{M}_+$ のとき，

$\theta \in C(\overline{M}_+ K)_x$ とは

$\Leftrightarrow$ (i) $\theta \in T_x X$. (ii) $\exists a_\ell > 0$. $\exists k_\ell \in K$. $k_\ell \to x$. $\exists m_\ell \in \overline{M}_+$. $m_\ell \to x$. s.t. $\theta = \lim_{\ell \to \infty} a_\ell (k_\ell - m_\ell)$.

(iii) $x \in M_+$ のときは (i) (ii) のみでよいが $x \in N$ のときは，更に $\langle \theta, dx_{m+1} \rangle \geqq 0$ をつけ加える。

$T\overline{M}_+$ により，TM の部分集合で M_+ 上の fibre は TM と同じで N上では $\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}$ の係数が非負のものを表わすとすると，定義1.3からわかるように $C(\overline{M}_+ K)_x$ は $T\overline{M}_{+x}$ 方向に不変なので同値類をとることができるから．

定義1.4. Xの closed set Kに対して，$x \in \overline{M}_+$ のとき，the normal set of K along $\overline{M}_+$ を次で定義する。

$$S_{\overline{M}_+}K_x \stackrel{\text{def}}{=} \left[C(\overline{M}_+ K)_x \,/\, T\overline{M}_{+x} \setminus 0 \right] / \mathbb{R}_+$$

次の補題1.5と命題1.6が得られる。証明については田島〔修論〕を参照。

補題1.5. Xの closed set G に対して次がなりたつ。

(1) $S_{\overline{M}_+}G|_{M_+} = S_M G|_{M_+}$　(2) $S_{\overline{M}_+}G|_N \subset S_M G|_N$

(3) $S_{\overline{M}_+}G \cup S_{\overline{M}_-}G = S_M G$　(4) $S_{N_+}G \setminus \qquad \subset q^{-1}S_{\overline{M}_+}G$

(5) $S_N(G\cap Y) \subset S_{\overline{M}_+}G \cap S_{\overline{M}_-}G \subset S_M G|_N$

命題1.6. $\varphi(x) = f(x) + \sqrt{-1}\,g(x)$. $\varphi(0)=0$. $d_N f(0) \neq 0$.

$K = \{z \mid \varphi(z)=0\}$ に対し次の(1)〜(4)が成立する。

(1) $g(x) \equiv 0$ ならば

$$(S_{\overline{M}_+}K)_0 = \left\{\left(0.\ v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_{n+1}}\right) \,\middle|\, v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) = 0\right\}.$$

(2) $g(x) \geqq 0$, $g(x) \not\equiv 0$ が

$\{x \mid x_{n+1} \geqq 0\} \cap \{x \mid f(x)=0\}$ でなりたつならば

$$(S_{\overline{M}_+}K)_0 = \left\{\left(0.\ v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_{n+1}}\right) \,\middle|\, v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \leqq 0\right\}.$$

(3) $g(x) \leqq 0$　$g(x) \not\equiv 0$ が

$\{x \mid x_{n+1} \geqq 0\} \cap \{x \mid f(x)=0\}$ でなりたつならば

$$(S_{\overline{M}_+}K)_0 = \left\{\left(0.\ v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_{n+1}}\right) \,\middle|\, v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)+\cdots+v_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \geqq 0\right\}$$

(4) $x=0$ の近傍をどんなに小さくとっても(1)〜(3)のいずれもなりたたないときは

$$(S_{\overline{M}_+}K)_0 = (S_M X)_0$$

定義1.7. M上の函数φが $x_0 \in \overline{M}_+$ で M_+ に関して positive typeとは、次の(1), (2)のいずれかをみたすときをいう。

(1) $\varphi(x_0) \neq 0$

(2) $\mathrm{Re}\, d\varphi(x_0) \neq 0$ $\exists W$: x_0 の M での近傍 s.t.

$$W \cap \{x \in \overline{M}_+ \mid \mathrm{Re}\,\varphi(x) = 0\} \text{ 上 } \mathrm{Im}\,\varphi(x) \geqq 0.$$

さて命題1.6よりただちに次の補題が得られます。

補題1.8　W を M の open set. φ は W 上の実解析関数。φ は $W \cap \overline{M}_+$ の各点で $\overline{M}_+$ に関して positive type。しかも、$\forall x_0 \in W \cap N$ に対して $\varphi(x) = 0$ ならば $\mathrm{Re}\, d_N \varphi(x) \neq 0$ がなりたつとすれば $K = \{z \mid \varphi(z) = 0\}$ とおくとき

$$\phi \neq C((S_{\overline{M}_+ \cap W} K) \cap S_{N \cap W} Y \subseteq C\, S_{N \cap W}(K \cap Y)$$

がなりたつ。

補題1.8の仮定をみたす φ は $W \cap M_+$ では positive type となるから、$\mathcal{O}'_{K|X}$ の元は自然に $W \cap M_+$ の開部分集合上の超函数として意味付けできますが、更に $Y(x_{m+1})\,\mathcal{O}'_{K|X}$ の元は holomorphic parameter $z_1, \cdots, z_n$ 付きの超函数として理解できます。ここで $\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}}(\mathcal{O}_X)$ の Γ_y を実領域 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ へ境界値をとれば $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}^{n+1}}(\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}}(\mathcal{O}_X)) \otimes \omega_{\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ がなりたつので（SKK. Chap I. 小松[8]）, $Y(x_{m+1})\,\mathcal{O}'_{K|X}$ の元は、$\overline{M}_+$ 内に台をもつ超函数として実現できます。

定義 1.9. 今の定義域の延長を holomorphic parameter による標準的延長と呼ぶ。又 $Y(x_{n+1})$ の代りに $\delta(x_{n+1})$ を使ったとき、その $\delta(x_{n+1})$ の係数を $x_{n+1}>0$ からの境界値という。

phase φ が positive type のとき境界値は初期値と一致する。又、境界値の特異台は、初期値の特異台の計算法と全く同じであることに注意。(補題1.8を使う)

命題 1.10. u が $W\cap\{x \mid x_{n+1}>0\}$ で定義された $P(x,D)u=0$ の超函数解とする。u が holomorphic parameter による標準的延長をもつならば、それは境界値問題の意味での標準的延長 $[u]^+$ と一致する。更に境界値に対しても

$$b_j(x,D_x)u\big|_{x_{n+1}\to+0} = b.\left(b_j(z,D_z)u(z)\big|_{z_{n+1}=0}\right)$$ がなりたつ。

注意. 一般に u から $[u]^+$ を得る方法は超越的であるけど、holomorphic parameter による延長の方法は自然と考えられる。特に u が phase を使って表わされている時には、複素領域のどの方向にのがれて考えればよいかが、命題1.6からただちにわかる。これは片岡[6]の mild な超函数の典型的場合になる。

§2

この節では、境界値問題のPoisson核の構成を行う。まず、P. Pallu De La Barriere et P. Schapira [13]の結果を紹介しよう。

Xを複素多様体。Y, ZはそれぞれX, Yの超曲面とする。PはX上の偏微分作用素。$p : P^*X \times_X Y \setminus P^*_Y X \longrightarrow P^*Y$ とする。次の条件(H1)、(H2)を置く。

(H1) Yは$P(z, D_z)$に関しnon-caractéristique.

(H2) $p^{-1}(P^*_Z Y)$の近傍で$\mathrm{Car}(P)$はP^*Xの正則多様体。更に$\mathrm{Car}(P) \cap (P^*X \times_X Y)$は$P^*X$の部分symplectique多様体。

このとき、Yの近傍においてZを通りPに関しcaractéristiqueな超曲面$K_1, \cdots K_d$が存在し、$K_1, \cdots, K_d$, Yは互いに横断的に交わる。m_j $(j=1, \cdots, d)$により$P^*_{K_j}X$の近傍における$\mathrm{Car}(P)$のmultiplicitéを表わすことにする。

$Y = \{z_{n+1} = 0\}$としてよい。$\gamma_k(f) = \frac{\partial^k}{\partial z_{n+1}^k} f \Big|_{z_{n+1}=0}$と記号を定めておく。

定理2.1. $\forall g \in \oplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}^1_{K_i|X}$ $\forall (h_k) \in (\mathcal{O}^1_{Z|Y})^m$ に対して、$f \in \oplus \mathcal{O}^1_{K_i|X}$ で $Pf = g$ $\gamma_k(f) = h_k$ $k = 0, \cdots, m-1$. をみたすfがYの近傍で唯一存在する。

定理2.2. $r \leq d$. $f \in \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}'_{K_i|X}$ が
$Pf \in \mathcal{O}_X$. $\gamma_k(f) \in \mathcal{O}_Y$ $k=0,\cdots,m_1+\cdots+m_r$ をみたすなら
$f \in \mathcal{O}_X$ がなりたつ。

さて境界値問題では全ての特性根が使用できるわけではないので、$x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type の K_i 達あるいは言葉をいいかえれば $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type の Lagrangean $P^*_{K_i}X$ を選ぶ必要がある。河合〔7〕が指摘したように、Cauchy data の数を少なくすれば、解 f を構成する際、特性面 K_i 達のいくつかを選んで、それ以外で正則な解を得ることができる。すなわち、

系2.3 $p \leq m$ $\forall (h) \in (\mathcal{O}'_{Z|Y})^p$ に対して、d 個の特性面 K_j $j=1,\cdots,d$ のうちの q 個 $K_{j_1},\cdots,K_{j_q}$ を、$m_{j_1}+\cdots+m_{j_q} \geq p$ と選ぶならば、$f \in \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{O}'_{K_{j_i}|X}$ で $Pf=0$,
$\gamma_k(f) = h_k$ $k=0,\cdots,p-1$. をみたす f が Y の近傍で存在する。

今 Z は N に関して positive type と仮定しておく。$\mathcal{O}'_{Z|Y}$ の元は N 上の超函数として意味付けできる。特性面 $K_{j_1},\cdots,K_{j_q}$ が $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type であるとすれば、

$p = m_{j_1} + \cdots + m_{j_q}$ とおいて. $(h) \in (\mathcal{O}'_{Z|Y})^p$ を超函数とみなした時 $f \in \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{O}'_{K_{j_i}|X}$ を $x_{n+1} > 0$ での超函数解として考えられ. $\gamma_k(f) = h_k$ $k = 0, \cdots, p-1$ が得られる場合がある。

注意すべきことは $\gamma_k(f)$ の特異台には条件が課せられるのでそれを合うように (h) を超函数として実現しなければならない点にある。

例. 2.4.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} - \sqrt{-1}\, x_2^{2m} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) u(x_1\, x_2) = 0 & x_2 > 0. \\ u(x_1\, x_2) \Big|_{x_2 \to +0} = \dfrac{1}{x_1 - x_1' \pm i0} \end{cases}$$

$[u]^+ = b \dfrac{Y(x_2)}{z_1 - z_1' + \frac{\sqrt{-1}}{2m+1} x_2^{2m+1}}$ なので $x_2 > 0$ からの境界値としては $1 \big/ x_1 - x_1' + i0$ のみが可能 。

命題 1.6 と補題 1.8 を使えば $(h) \in (\mathcal{O}'_{Z|Y})^p$ をどの様に超函数として実現しておけば. $f \in \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{O}'_{K_{j_i}|X}$ の $x_{n+1} > 0$ からの境界値と一致するかは明らかとなる。

又. Z を strictly positive type にとれる. K_{j_i} 達も $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type にとれるならば. (h) の特異台を1点のみから成る様にとれることを注意しておこう。

定理2.5. Poisson核の構成.

$P(x\, D_x)$ は m階線型偏微分作用素. N は P に関し非特性的

更に. $p_m(x', 0; \xi'\, \zeta_{n+1}) = 0$ ならば $\frac{\partial p_m}{\partial \zeta_{n+1}}(x', 0; \xi'\, \zeta_{n+1}) \neq 0$

がなりたつとする。

$$\begin{cases} P(z\, D_z)\, u_k(z\, y'\, \xi') = 0. \\ \dfrac{\partial^l}{\partial z_{n+1}^l} u_k(z\, y'\, \xi')\Big|_{z_{n+1}=0} = \delta_{l,k} \dfrac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \dfrac{1}{\langle z' - y' \cdot \xi' \rangle^{n-1}} \\ \qquad 0 \le l,\, k \le p-1 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ の原点の近傍 $\times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ における解.

$$u_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{F_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi')}{\varphi_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi')^{l_{\alpha_j}}} + G_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi') \log \varphi_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi') + H_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi')$$

の特性函数 $\varphi_{\alpha_j}(z\, y'\, \xi')$ $j = 1, 2, \cdots, p$ が $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type であるとする。 このとき.

$$\begin{cases} P(x\, D_x)\, u(x) = 0 & x_{n+1} > 0. \\ \dfrac{\partial^l}{\partial x_{n+1}^l} u(x)\Big|_{x_{n+1} \to +0} = \mu_l(x') & l = 0, 1, \cdots, p-1. \end{cases}$$

なる境界値問題は $\operatorname{supp} \mu_l \subset\subset N_0$ の条件へもとにとける。
但し N_0 は $\mathbb{R}^n = N$ の原点の適当な近傍である。

注意 定理の煩雑さを避けるため simple characteristic の場合のみ述べたが. 今までのことから constant multiplicity の場合に拡張できる。また平面波でなく曲面波を使ってもよい。

証明の方針.

$E_k(x\ y') = \int u_k(x\ y'\ \xi')\,\omega(\xi')$ とおくと E_k は $x_{n+1} > 0$ における超函数で $x_{n+1} = 0$ へ holomorphic parameter による標準的延長をもつ。

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} \int E_k(x\ y')\,\mu_k(y')\,dy'$$

が $x_{n+1} > 0$ における解であることはよい。

$$[u(x)]^+ = \sum_{k=1}^{p} \int [E_k(x\ y')]^+\,\mu_k(y')\,dy'$$

と holomorphic parameter による標準的延長を行う。

holomorphic parameter による境界値と、偏微分方程式の解の意味での境界値は一致するので 証明された 。

系 2.6. 定理 2.5 に表われた位相函数 $\varphi_{\alpha j}$ が、$x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type であるのみならず、M 上で positive type であるならば、$x_{n+1} > 0$ での解 $u(x)$ は、$x_{n+1} \leqq 0$ へ、方程式の解として接続される。すなわち、境界値は実は初期値となる。

参考文献

(1) Yūsaku HAMADA : The singularities of the solutions of the Cauchy problem
Publ. RIMS Kyoto. Univ. 1969.

(2) Akira. KANEKO. : Singular Spectrum of boundary values of solutions
of partial differential equations with real analytic coefficients.

(3) Masaki KASHIWARA. Takahiro. KAWAI. : Micro-hyperbolic pseudo-
differential operators. J. Math Soc. Japan. vol 27. 1975.

(4) 柏原正樹・河合隆裕. 楕円型境界値問題の理論とその応用
数理科学講究録 238

(5) Masaki KASHIWARA. Pierre SCHAPIRA. : Problème de Cauchy pour
les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe.
Inventiones math 46. 1978. 17—38.

(6) 片岡清臣 : Mildな超函数とGreenの公式について.

(7) Takahiro KAWAI. : Construction of local elementary solutions for linear
partial differential operators with real analytic coefficients I II.
Publ. RIMS. Kyoto. Univ. 1971/72.

(8) Hikosaburo. KOMATU. : An introduction to the theory of hyperfunctions.
Springer Lecture Note 287.

(9) Anders MELIN and Johannes SJOSTRAND.
Fourier integral operators with complex valued phase
functions. Springer Lecture Note. 459.

(10) Andres MELIN and Johannes SJOSTRAND.

Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem.

comm. in partial differential equations 1. (4). 1976. 313-400

(11) 〃 〃

A calculus for Fourier integral operators in domains with boundary and applications to the oblique derivative problem.

comm in partial differential equations. 2 (9). 1977 857-935

(12) Tetsuji MIWA : Propagation of micro-analyticity for solutions of pseudo-differential equations I. 数理科学講究録 226.

(13) P. Pallu De La. Barriere et P. SCHAPIRA.

Application de la theorie des microfonctions holomorphes au probleme de Cauchy a donnees singulieres.

Seminaire Goulaouic - Schwartz 1975/76.

(14) P. SCHAPIRA : Propagation au bord et reflexion des singularites analytiques des solutions des equations aux derivees partielles I. II. Seminaire Goulaouic-Schwartz. 76.

(15) J. SJOSTRAND : Applications of Fourier distributions with complex-phase functions Springer Lecture Note 459.

(16) Hassler. WHITNEY. Complex analytic varieties.

Addison Wesley.