数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 72-79

Mildな超関数とGreenの公式について.

東大 理　片岡清臣

混合-境界値問題に於いては、解の一意性などを示す時もしadjoint systemの「よい基本解」が作れれば、もとの解との内積をとり、Greenの公式を使って積分する事により目的が達せられる。そこでこのGreenの公式なるものを超局所的に一般化できれば解の超局所的一意性を示すのに便利である。この目的の為に超関数が境界に於いて"mild"であるという事を定義し、さらにこのmildnessが積分や、積をとる演算に対して閉じている事を示す。

<u>記号</u>. M：n次元実解析的多様体、N：余次元1の部分多様体，X，Yをそれらの複素化とする。以下，$M=\mathbb{R}^n \ni (x_1, x')$ $N=\{x\in M\,;\,x_1=0\}$，$M_+=\{x\in M\,;\,x_1\geq 0\}$ とおく。さらに $S^*_{M_+}X$ （$S^*_N X$）をM_+の（Nの）Xに於ける余法球束とする。

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{M_+/X}\ ;\ S^*_{M_+}X \longrightarrow M_+\\ \pi_{N/X}\ ;\ S^*_N X \longrightarrow N\end{array}\right\}\ \text{自然な projection.}$$

<u>定義</u>. $f(x) \in \mathcal{H}^0_{M+}(\mathcal{B}_M)_{x_0} = \pi_{M+/X*} C_{M+|X}|_{x_0}$ $(x_0 \in N)$ が x_0 で **mild** とは, $\exists g \in \pi_{N/X*}(C_{N|X}|_{S^*_Y X \cap S^*_N X})_{x_0}$ s.t. $f(x) = g(x)$ on $S^*_Y X \cap S^*_{M+} X$. 実際このような g は $f(x)$ により一意に定まる. また $f(x) \in \mathcal{B}_{N|M+}|_{x_0} = (\mathcal{H}^0_{M+}(B_M)/\mathcal{H}^0_N(B_M))_{x_0}$ が x_0 で mild とは $f(x) = [h(x)]$ なる $h \in \mathcal{H}^0_{M+}(\mathcal{B}_M)_{x_0}$ が x_0 で mild の事とする。実際これは代表元 h のとり方によらない。以下 $\hat{\mathcal{B}}_{N|M+}$ によって mild な超関数の作る $\mathcal{B}_{N|M+}$ の部分層を表わす。($\mathcal{D}_X$-部分層).

<u>例1</u>. $P(x, D_x)$: $x_1 = 0$ を非特性面にもつ微分作用素。そのとき $u(x) \in (\mathcal{H}^0_{M+}(\mathcal{B}_M)/\mathcal{H}^0_N(\mathcal{B}_M))_{x_0}$ $(x_0 \in N)$ が P の解ならば, u は x_0 で mild.

<u>例2</u>. $u(x) \in \mathcal{B}_M|_{x_0}$ が $x_0 \in N$ で x_1 を実解析的パラメータに持つならば. $u(x)$ は $x_0 \in N$ で正負のいずれの側からも mild.

次に問題を超局所化する為に種々の層を定義する。

<u>定義</u> $S^*_N X^\infty$ と τ^∞ を次の様に定義する。

$$\begin{array}{ccccc} S^*_N X^\infty = (S^*_N X \setminus S^*_Y X) & \sqcup & iS^*N \times \{\infty\} & \xrightarrow{\tau^\infty} & iS^*N \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (0, x'; \varsigma_1, i\eta') & & (0, x'; \infty, i\eta') & & (x'; i\eta') \end{array}$$

明らかに $S^*_N X^\infty$ は実解析的多様体, τ^∞ は実解析的射影であり ファイバーは $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. i ; $S^*_N X \setminus S^*_Y X \hookrightarrow S^*_N X^\infty$ とおくと.

$$C^\infty_{N|X} = i_*(C_{N|X}|_{S^*_N X \setminus S^*_Y X}). \quad (S^*_N X^\infty \text{上の層})$$

これを使って $\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ の分解層 $\hat{C}_{N|M_+}$ を得る.

$$\hat{C}_{N|M_+} \equiv \iota^{+}_{*}(C_{M_+|X}|_{\overline{G}_+\setminus S^*_Y X}) \cap (C^{\infty}_{N|X}|_{iS^*N\times\infty}) / \iota_*(C_{N|X}|_{S^*_N X\setminus S^*_Y X})$$

ここで　$\overline{G}_+\setminus S^*_Y X = \{(0, x'; \varsigma_1, i\eta') \in S^*_{M_+}X|_N ;\ \mathrm{Re}\,\varsigma_1 \geq 0,\ \eta' \neq 0\} \xrightarrow{\iota^+} iS^*N$

$\iota ;\ S^*_N X\setminus S^*_Y X \to iS^*N$ は自然な projection.

特に $\hat{C}_{N|M_+}$ は自然に $\iota_*\mathcal{P}_X$ −moduleになる.

次に同じく iS^*N 上の層　$C_{N|M_+}$　を導入する.

$$C_{N|M_+} \equiv \mathrm{Image\ of}\ (\pi_N^{-1}\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \longrightarrow \iota^+_*(C_{M_+|X}|_{\overline{G}_+\setminus S^*_Y X}))$$

$C_{M_+|X}|_I \hookrightarrow C_M|_I$　の単射性により. これは

$$\mathrm{Image\ of}\ (\pi_N^{-1}\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \longrightarrow \iota|_{I*}(C_M|_{I\setminus S^*_Y X}))$$

に等しい。すなわち $C_{N|M_+}$ は $\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N$ の iS^*N 上での分解層である. （注 ;　$I = \overline{G}_+ \cap S^*_M X \ni (0, x'; i\eta_1, i\eta')$）

<u>注意</u>　$C_{N|M_+}$ はもちろん $\pi_N^{-1}\mathcal{D}_X$ − module ではあるが. 一般に $\iota_*\mathcal{P}_X$ の元は作用しない。

<u>定理</u>　$\hat{C}_{N|M_+}$, $C_{N|M_+}$ に対して次の完全列が成立する。

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_M|_N \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \longrightarrow \pi_{N*}\hat{C}_{N|M_+} \to 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_{M_+/X*}\mathcal{H}^0_{\overline{G}_+\cap S^*_Y X}(C_{M_+|X}|_{\overline{G}_+}) \to \mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \to \pi_{N*}C_{N|M_+} \to 0$$

$$\pi_N^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \to \hat{C}_{N|M_+} \to 0, \quad \pi_N^{-1}\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \longrightarrow C_{N|M_+} \to 0.$$

<u>定理</u>　$\hat{\mathcal{C}}_{N|M_+}$ は soft sheaf，$\mathcal{C}_{N|M_+}$ は flabby sheaf である。特に $\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ も soft.

さらに詳しく分析する為には定義関数として具体的にどのようなものがとれるかを見る必要がある，まず M_+ を中心とした X のモノイダル変換を思い出す．

$$S_{M_+}X = \underset{(0,x';\,w_1=u_1+iv_1,\,iv')}{(S_NX - S_NM_+)} \sqcup \underset{(x_1,x';\,iv_1,\,iv')}{iSM|_{M_+}}$$

但し，$S_NM_+ = \{(0,x';+1,0)\}$ であり，$iSM|_N \cong \{(0,x';+\infty+iv_1,iv')\}$ として２つの部分をつなぐ。

$$\widetilde{M_+}X = (X-M_+) \sqcup S_{M_+}X$$

は自然にモノイダル変換の位相をもつ。

$$\tilde{\mathcal{a}}_{M_+} \equiv j_*(\mathcal{O}_X|_{X-M_+})|_{S_{M_+}X} \qquad j: X-M_+ \hookrightarrow \widetilde{M_+}X$$

記号の簡単の為 $S_{M_+}X|_N = L$ とかく。

<u>補題</u>．次の集合は座標不変に定義される L の閉部分集合。

$$F_+ = \{(0,x';w_1,iv') \in L\,;\ v_1=0,\ 0 \leqq u_1 \leqq +\infty\}.$$

さらに projection $\theta: F_+ \ni (0,x';u_1,iv') \longrightarrow (x',iv') \in iSN$ も自然に定義される。

<u>定義</u>．次のような iSN 上の層が自然に定義される．

$$\tilde{A}_{M_+} \equiv \mathbb{R}\theta_*(\tilde{a}_{M_+}|_{F_+}) = \theta_*(\tilde{a}_{M_+}|_{F_+})$$

$$\tilde{B}_{M_+} \equiv \mathbb{R}\theta_* \mathbb{R}\Gamma_{F_+}(\tilde{a}_{M_+}|_L)[1] = \mathcal{R}^1\theta_* \mathbb{R}\Gamma_{F_+}(\tilde{a}_{M_+}|_L)$$

直ちにわかる事は，次の様な埋め込みが存在する事である。

$$\tilde{A}_{M_+} \hookrightarrow \tau_N^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{M_+} \hookrightarrow \tau_N^{-1}\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)$$

すなわち，$\tilde{A}_{M_+}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{M_+}$ の境界値はそれぞれ $\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+}$, $\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N$ の section を与える．逆に次の定理が成立する。

<u>定理</u>. $D^-N = \{(x'; iv'; i\eta') \in iSN \underset{N}{\times} iS^*N \mid \langle v', \eta' \rangle \leqq 0\}$ とおくと下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & D^-N \arrow[dl, "\pi_N"'] \arrow[dr, "\tau_N"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowright"] & \\
iSN \arrow[dr, "\tau_N"'] & & iS^*N \arrow[dl, "\pi_N"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

この時次の様な系列は完全である。

$$0 \longrightarrow \tilde{A}_{M_+} \longrightarrow \tau_N^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \longrightarrow \pi_{N*}\tau_N^{-1}\hat{C}_{N|M_+} \to 0$$

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{M_+} \longrightarrow \tau_N^{-1}\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M) \longrightarrow \pi_{N*}\tau_N^{-1}C_{N|M_+} \to 0$$

$\hat{C}_{N|M_+}$, $C_{N|M_+}$ がそれぞれ soft, flabby である事を用いれば，$\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+}$, $\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N$ の germ は．$\tilde{A}_{M_+}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{M_+}$ の境界値の和で書ける事がわかる。

最後に $\widetilde{A}_{M+}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{M+}$ を使って種々の Operation を定義する。

命題. 自然に次の様な層準同型が存在する。

(i) 積
$$\widetilde{A}_{M+} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \widetilde{A}_{M+} \longrightarrow \widetilde{A}_{M+}$$
$$\widetilde{A}_{M+} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{B}}_{M+} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{M+}$$
$\mathcal{D}_X$ の作用に対して Leipnitz rule を満たす。

(ii) Trace. $\widetilde{A}_{M+} \longrightarrow \widetilde{a}_N$

($x_1=0$ とおく)

(iii) Canonical Imbedding
$$i; \widetilde{A}_{M+} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{M+}$$
: $\mathcal{D}_X$-Linear ではない。

($Y(x_1)$; Heaviside 関数を掛ける ---(i) の積から誘導)

これらより直ちに $\hat{\mathcal{B}}_{N|M+}$, $\mathcal{H}^{p}_{M+}(\mathcal{B}_M)$ についての情報が得られる。

定理.

(i) 積
$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}_{N|M+} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \hat{\mathcal{B}}_{N|M+} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{B}}_{N|M+} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (f, g) & & f\cdot g \end{array}$$

但し (Support of f in $\hat{C}_{N|M+}$) $\cap$ (Support of g in $\hat{C}_{N|M+}$)$^a = \phi$

とし、その時

(Support of fg in $\hat{C}_{N|M+}$) は

(Support of f in $\hat{C}_{N|M+}$)$^{\vee}$ (Support of g in $\hat{C}_{N|M+}$)

に含まれる。

$$\hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \longrightarrow \mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N$$
$$(f, g) \qquad\qquad\qquad f\cdot g$$

但し. (Support of f in $\hat{C}_{N|M_+}$) $\cap$ (Support of g in $C_{N|M_+}$)$^a = \phi$

とし, その時.

(Supp. of fg in $C_{N|M_+}$) $\subset$ (Supp. of f in $\hat{C}_{N|M_+}$)$^\vee$ (Supp. of g in $C_{N|M_+}$)

特に　$g \in \mathcal{H}^0_N(\mathcal{B}_M)$ とすれば　$f\cdot g \in \mathcal{H}^0_N(\mathcal{B}_M)$

(ii) trace.

$$\mathrm{Trace};\ \hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \longrightarrow \mathcal{B}_N$$
$$f(x_1, x') \qquad\qquad f(+0, x')$$

なる層準同型が得られる.

i) の積を使うと.

$$\mathrm{Trace}(f(x_1, x')) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x')\,\delta(x_1)\,dx_1$$

さらに, $SS(\mathrm{Trace}(f(x_1, x'))) \subset$ Supp. of f in $\hat{C}_{N|M_+}$

(iii) Canonical Imbedding.

$$i;\ \hat{\mathcal{B}}_{N|M_+} \hookrightarrow \mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)|_N \quad (\mathcal{D}_X\text{-Linear ではない。})$$

これは. (i) を使うと. $f(x)Y(x_1)$ ともかける。

$\pi^{-1}(N) \cap (SS(i(f)) \setminus iS^*_N M) = \mathcal{U}_I^{-1}$ (Supp. of f in $\hat{C}_{N|M_+}$) であって. $f(x)$ の $\mathcal{H}^0_{M_+}(\mathcal{B}_M)$ への flabby extension の中で $i(f)$ はその特異性が最小になっている。そこで f の N 上での特異性とは $i(f)$ の特異台と定義すると都合がよい。

注意　(i)で定義された積は $x_1>0$ では普通の超関数論で定義されるものと同じである。しかも全体として Leipnitz rule を満たす。

(ii)で定義された Canonical Imbedding は $f(x)$ が非特性微分作用素の解である時には、解としての標準延長と一致する。

(i), (ii), (iii) は特異性の評価も含んでいるので、これから直ちに、$\hat{C}_{N|M_+}$, $C_{N|M_+}$ について積, Trace, Canonical Imbedding などの超局所化が定義できる。

さらに (i)の積などはパラメータに関する積分と交換する事がわかるので、Green の公式の超局所化が得られる。それについて詳しい事は省略する。