

線型常微分方程式系の変形理論

京大 数理解 上野 喜三雄

§.序 線型常微分方程式の (monodromy preserving) deformation の起源は古く、既に今世紀の初頭 L. Schlesinger [1], R. Fuchs [2] 等によって具体的な結果が得られている。Schlesinger は, canonical system

$$\frac{d}{dx} \vec{y} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{A_i(a)}{x-a_i} \right) \vec{y} \quad a = (a_1, \dots, a_m)$$

$A_i(a)$ は, a に holomorphic に depend する。

の変形の方程式として, いわゆる Schlesinger の微分方程式

$$dA_\mu = \sum_{\nu \neq \mu} [A_\nu, A_\mu] d \log (a_\nu - a_\mu) \quad (\mu=1, \dots, m)$$

を得た。一方, Fuchs は, 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(\alpha, t) y$$

$$\phi(\alpha, t) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(\alpha-1)^2} + \frac{c}{(\alpha-t)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(\alpha-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{r}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}$$

$$\alpha + \beta + r + \varepsilon = 0$$

の変形の方程式として,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-\lambda} \right) \frac{d\lambda}{dt} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)^2} \left\{ k_0 - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - k_t \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right\} \end{aligned}$$

を得た。これは, Painlevé VI型と呼ばれる非線型微分方程式であ
 って, その解は動く分岐点を持たない。2階の代数的微分方
 程式であって解が動く分岐点を持たないようなものは, 6つの
 標準形に分類され, それらが, いわゆる Painlevé I型~VI型と
 呼ばれる一連の微分方程式である。(Ince [6]) R. Garnier [5]
 は, 1912年の論文で, I型からVI型も, 不確定特異点をもつ, 2階
 の微分方程式の変形として得られるということを示している。

一方, 近年においては, K. Okamoto [8]によるトラス上の
 Fuchs型微分方程式の変形の計算, Sato-Miwa-Jimbo [9]によ
 る holonomic quantum fieldに関連して行われた Euclidean Dirac
 方程式に補助の方程式を付加して得られる holonomic system
 の変形の計算がある。

本稿においては, $x=\infty$ に一級, 及び二級の不確定特異点をも
 つ常微分方程式系

$$\frac{d}{dx} \vec{y} = \left(\sum_i \frac{A_i(x)}{x-a_i} + B(x) \right) \vec{y}$$

$$x \frac{d}{dx} \vec{y} = (Ax^2 + Bx + C) \vec{y}$$

の変形理論の構成, 及びその背後の問題点を報告する。

我々は, 有限の確定特異点の monodromyのみならず, 不確
 定特異点における Stokes係数, 形式的 monodromyをも保存す
 るように変形の方程式を構成する。

§1 変形理論の構成

$x=\infty$ で1級の不確定特異点をもつ線型常微分方程式系

$$\frac{d}{dx} Y = \left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i(\alpha)}{x-a_i} + B(\alpha) \right) Y \quad \text{---- (1)}$$

$A_i(\alpha)$ ($i=1, \dots, N$), $B(\alpha)$ は, α の正則函数を成分とする $n \times n$ 行列。

ただし, 次の条件を満足するものとして。

(1) $A_i(\alpha)$; generic for $\forall i$ 即ち, $A_i(\alpha)$ の固有値はすべて異なる。

(2) $B(\alpha) = \text{diag}(b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha))$ s.t. $b_\alpha(\alpha) - b_\beta(\alpha) \notin \mathbb{Z}$ for $\forall \alpha \neq \beta$

以下の理論構成においては, 漸近展開の理論が不可欠であるので, それを定理として述べておくことにする。

定理 I \mathcal{D} は, $x=\infty$ を頂点とする open な角領域で, その頂角は $\frac{\pi}{\mu}$ よりも小とする。 $T \subset \mathbb{C}$ は, 適当な有界領域とする。 $A(\alpha, t)$ は $S \times T$ で正則で, t に関して一様な漸近展開をもつとする。

$$A(\alpha, t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(t) x^{-r} \quad \text{in } S \times T \quad (t \text{ に関して一様})$$

また, A_0 の固有値を $(\lambda_1, \dots, \lambda_p), (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m)$ と二つのグループに分けたとき, $\lambda_j \neq \lambda_k$ $j \leq p, k \geq p+1$ であるとして。この時次の微分方程式を考える。

$$x^{-\beta} \frac{d}{dx} Y = A(\alpha, t) Y \quad \text{---- (*)}$$

このとき, \mathcal{D} の適当な部分角領域 S' をとると, $S' \times T$ で正則な函数 $P(\alpha, t)$ で次の条件を満すものが存在する。

$$(1) P(\alpha, t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) \alpha^{-r} \text{ in } S' \times T \text{ (} t \text{ に関して一様)}$$

$$(2) \det P_0 \neq 0$$

(3) $Y = PZ$ という変換を前述の方程式に施すと

$$\alpha^{-\phi} \frac{d}{d\alpha} Z = B(\alpha, t) Z$$

ただし, $B(\alpha, t)$ は, 次の条件をみたす。

- $B(\alpha, t) = \begin{pmatrix} B^{11}(\alpha, t) & \\ & B^{22}(\alpha, t) \end{pmatrix}$ B^{11} : $\phi \times \phi$ 行列
 B^{22} : $(m-\phi) \times (m-\phi)$ 行列.
- $B^{jj}(\alpha, t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{jj}(t) \alpha^{-r}$ in $S' \times T$ (t に関して一様) $j=1, 2$
- B_0^{jj} の固有値は, $\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_\phi & j=1 \\ \lambda_{\phi+1}, \dots, \lambda_m & j=2 \end{cases}$ である。

系 $A(\alpha, t)$ は定理と同じ条件をみたし, かつ固有値はすべて相異なるとする。このとき, 微分方程式(*)は角領域 S' において次の条件を満足する解の基本系 $Y(\alpha, t)$ をもつ,

$$(1) Y(\alpha, t) = \hat{Y}(\alpha, t) \alpha^{D(t)} \exp Q(\alpha, t), \quad Y(\alpha, t) \text{ は } S' \times T \text{ で正則.}$$

(2) $D(t), Q(\alpha, t)$ に対角行列で α にも t にもついて正則である。さらに $Q(\alpha, t)$ は α の $(\phi+1)$ 次の多項式である。

$$(3) \hat{Y}(\alpha, t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r(t) \alpha^{-r} \text{ in } S' \times T \text{ (} t \text{ に関して一様). } \det \hat{Y}_0 \neq 0.$$

これらの証明は, Wasow の教科書 [7] にある漸近展開の理論を助変数を含む場合に拡張すればよいのだが長くなるので省略する。従来, 助変数を含む場合の漸近展開の理論は, "大きな助

変数を含む場合に限定されていたので、上述の様な定理は新しい。

さて角領域 δ_j ($j=1, \dots, 6$) を次の条件をみたす様にとる。

- δ_j の頂角は、 $\frac{\pi}{2}$ より小である。
- $\delta_j \cap \delta_{j+1} \neq \emptyset$, $\bigcup_{j=1}^5 \delta_j \supset \{x; |x| > x_0, 0 \leq \arg x \leq 2\pi\}$
- $\delta_6 = \delta_1 e^{2\pi i}$
- $\operatorname{Re}[(b_\alpha(a) - b_\beta(a))x] = 0$ によって定まる放射線はすべて δ_j の内部にある。

以上の仮定のもとで定理の系より (1) の解の基本系 $Y_j(x; a)$ ($j=1, \dots, 6$) 以下の条件を満足するものが存在する。

- $Y_j(x; a)$ は、 a に関して正則
- $Y_j(x; a) \sim Y_\infty(x; a) x^{D(a)} \exp(\alpha B(a))$ in δ_j (a について同様)
 $D = \operatorname{diag}(d_1(a), \dots, d_m(a))$
 $Y_\infty(x) = I + Y_\infty^{(1)}(a) x^{-1} + \dots$, $I: m \times m$ 単位行列
- $Y_6(x; a) = Y_1(x; a) e^{2\pi i D}$

remark 今の議論では必要ないが、 $d_\alpha - d_\beta \notin \mathbb{Z}$ for $\alpha \neq \beta$ という仮定が後に必要となる。

ところで、Stokes 係数とは、 $Y_{j+1} = Y_j C_j$ ($j=1, \dots, 5$) をみたす非特異行列のことである。そして、 $Y_1(x)$ は各 δ_j を通過するごとに、 $Y_1 C_1^{-1}$, $Y_2 C_2^{-1} C_1^{-1}$, \dots , $Y_6 C_5^{-1} \dots C_1^{-1}$ という様に解析接続され δ_6 に入った時、 $Y_\infty Y_1(x) = Y_1(x) e^{2\pi i D} C_5^{-1} \dots C_1^{-1}$ となる。そこで我々は

次の仮定を置くことにする。

$$\text{仮定 I} ; dC_j = 0 \text{ for } \forall j, dD = 0$$

ただし d は助変数 a についての外微分である。

即ち、我々は、Stokes 係数及び形式的 *monodromy* は保存されるものとする。次に、有限の確定特異点のまわりでの *monodromy* が保存されるとはどういうことを説明する。

$x = a_i$ の近傍では、 $Y_i(x)$ は、

$$Y_i(x) = \Phi_i(x) (x - a_i)^{L_i}$$

ただし、 $\Phi_i(x)$ は $x = a_i$ の近傍で正則で $\det \Phi_i(a_i) \neq 0$ である。

と表わせる。従って、*monodromy* が保存されるとは、

$$\text{仮定 II} ; dL_i = 0 \text{ for } \forall i,$$

とすることである。

今の場合、変形理論を構成するとは、仮定 I, II のもとで、函数 $\frac{\partial Y}{\partial a_j} \cdot Y^{-1}$ (もしくは、 $dY \cdot Y^{-1}$ という 1-form) を決定することを意味する。

以下において、このことを実行する。

$$\text{仮定 I より、} \frac{\partial Y_k}{\partial a_j} Y_k^{-1} = \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial a_j} Y_{k+1}^{-1} \text{ が従う。}$$

次に、漸近展開の式

$$Y_j(x; a) \sim Y_\infty(x; a) x^{D(a)} \exp(\alpha B(a)) \text{ in } S_j \text{ (} a \text{ について同様)}$$

の式を a_j で微分すると、仮定 I 及び上記のことに注意すれば、

$$\frac{\partial Y_j}{\partial a_j} \cdot Y_j^{-1} \sim \frac{\partial Y_\infty}{\partial a_j} Y_\infty^{-1} + Y_\infty \left(\alpha \frac{\partial B}{\partial a_j} \right) Y_\infty^{-1} \text{ in the full nbd of } x = \infty$$

(この漸近展開は、助変数 a に関する *uniformity* より有効で

ある。) 上の漸近展開は, $x=\infty$ の全近傍で成立しているから, 実は,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1} = \frac{\partial Y_\infty}{\partial a_j} Y_\infty^{-1} + Y_\infty \left(x \frac{\partial B}{\partial a_j} \right) Y_\infty^{-1} \quad \text{--- (2)}$$

である。又, 仮定 II より, $x=a_i$ の近傍で,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j} \Phi_i^{-1} - \delta_{ij} \Phi_i^{-1} \frac{M_i}{x-a_i} \Phi_i^{-1} \quad \text{--- (3)}$$

が成立する。

従って, $\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1}$ は $x=a_j$ で 1 位の極をもち, そこでの留数は,

$$\text{Res}_{x=a_j} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1} \right) = -A_j, \quad \text{Res}_{x=\infty} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1} \right) = \frac{\partial B}{\partial a_j}$$

であり, 他では正則である。さらに, (2) の右辺の定数項を漸近展開を具体的に計算することにより求めることができ,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial a_j} Y_i^{-1} = \frac{-A_j}{x-a_j} + \left\{ \frac{\partial B}{\partial a_j}, A \right\}_B + x \frac{\partial B}{\partial a_j} \quad \text{--- (4)}$$

を得る。ただし, $A = \sum_{i=1}^N A_i$ である。また, $\{, \}_B$ の意味は次の通りである。

$$\left\{ \frac{\partial B}{\partial a_j}, A \right\}_B \text{ の } (\mu, \nu) \text{ 成分} = \begin{cases} A_{\mu\nu} \frac{\frac{\partial b_\mu}{\partial a_j} - \frac{\partial b_\nu}{\partial a_j}}{b_\mu - b_\nu} & (\mu \neq \nu) \\ 0 & (\mu = \nu) \end{cases}$$

(4) を 1-form の型で,

$$dY_i \cdot Y_i^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x-a_i} da_i + \{dB, A\}_B + x dB$$

とも書けることに注意する。

従って,

$$\begin{cases} P = \frac{d}{dx} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x-a_i} + B \right) \\ \Omega = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x-a_i} da_i + \{dB, A\}_B + x dB \end{cases}$$

とあけは、(1)に対する extended system

$$\begin{cases} PY=0 \\ dY=\Omega Y \end{cases}$$

を得る。この system の積分可能条件は、

$$\begin{cases} dP=[\Omega, P] \\ d\Omega=\Omega \wedge \Omega \end{cases}$$

であるか、これを具体的に書き出せば、

$$\begin{cases} dA_i = \sum_{j \neq i} [A_j, A_i] d \log(a_j - a_i) + \{dB, A\}_B, A_i + [d(a_i B), A_i] \\ \{dB, dA\}_B = \{dB, A\} \wedge \{dB, A\}_B + [dB, \sum A_i da_i] \end{cases} \quad (5)$$

となる。

以上の長々しい考察の結果、我々は、仮定 I, II より非線型微分方程式系(5)を導出したのである。

命題 (5)は、完全積分可能な外微分式系である。

証明は、省略する。(長い計算が必要。)

(5)において、 $B=0$ とすれば、Schlesingerの方程式に帰着されるのであるから、(5)は、まさに、Schlesinger方程式の拡張になっている。

逆に(5)が成立するとしよう。そのとき形式的 monodromy D は、一定である。即ち、 $dD=0$ 。実際、 D は A の diagonal 成分に等しいが、(5)より、 $dA = \text{off diagonal 行列}$ であるから、 $dD=0$ であ

る。さて、 Y_k ($k=1, \dots, 6$)を先に存在の保証された(1)の解の基本系とする。次の二つの補題が成立する。

補題I ある定数行列 $K(a)$ が存在して、 $dY_j = \Omega Y_j + Y_j K(a)$ が成立する。

証明 $dP = [\Omega, P]$ より、ある K_j が存在して $dY_j = \Omega Y_j + Y_j K_j$ となるが、 $K_j = Y_j^{-1}(dY_j - \Omega Y_j)$ であるから、右辺の各 Y_j における漸近展開(それは j に依らない)を計算すれば、 K_j は j に依存しないことがわかる。 g. e. d

補題II $K=0$ i.e. $dY_j = \Omega Y_j$ $j=1, \dots, 6$

証明 $dD=0$ より、 $dY_1 \cdot Y_1^{-1} - \Omega = dY_6 \cdot Y_6^{-1} - \Omega$ である。

$$\text{左辺} = Y_1 K Y_1^{-1}, \quad \text{右辺} = Y_6 K Y_6^{-1} = Y_1 e^{2\pi i D} K e^{-2\pi i D}$$

$$\therefore [e^{2\pi i D}, K] = 0$$

D は対角行列でかつ成分の差は整数でないから、上の式より、 K も対角行列である。これより

$$Y_1 K Y_1^{-1} \sim K + O(\bar{\alpha}^{-1}) \quad \text{in } S_1$$

であるが、 $dY_1 \cdot Y_1^{-1} - \Omega$ の漸近展開における定数項が 0 となることは、 Ω の取り方から明らか故、 $K=0$ である。 g. e. d

この補題により Stokes 係数は保存されることかわかる。

実際、 $dY_{j+1} \cdot Y_{j+1}^{-1} = dY_j \cdot Y_j^{-1} = \Omega$ であるから、 $Y_{j+1} = Y_j C_j$ とすれば、 $dY_{j+1} \cdot Y_{j+1}^{-1} = dY_j \cdot Y_j^{-1} + Y_j dC_j \cdot C_j^{-1} Y_j^{-1}$ であるから $dC_j = 0$ を得

る。有限の特異点での *monodromy* が保存されることは明らか故、以上をまとめると次の定理を得る。

定理II 仮定 I, II が成立する為の必要かつ十分な条件は, $A_i (i=1, \dots, N)$, B が非線型微分方程式系 (5) を満すことである。

§2. 二級の不確定特異点を持つ場合の変形理論

$$P = x \frac{d}{dx} + x^2 A + xB + C \text{ とおくと,}$$

$$PY = 0 \quad \text{--- (1)}$$

という方程式を考える。ただし, A, B, C は, $n \times n$ 行列で, 適当な助変数に正則に依存しているものとする。また, A は対角行列で, 成分の差は, 相異なるとする。 $A = \text{diag}(a_\mu)_\mu$, $B = (b_{\mu\nu})$ と書くことにする。 §1 と同様な議論により, 漸近展開を計算することで, "変形的作用素" Ω

$$\Omega = x^2 \Phi + x\Psi + \Theta$$

を得ることが出来る。ただし, Φ, Ψ, Θ は 1-form で,

$$\Phi = -\frac{1}{2} dA$$

$$\Psi = -dB_d + \{-\frac{1}{2} dA, B\}_A$$

$$\Theta = \{\frac{1}{2} dA, C\}_A + \{\Psi, B\}_A + \text{diag} \left\{ \frac{1}{2} \sum_\nu d(a_\mu - a_\nu) \frac{b_{\mu\nu} b_{\nu\mu}}{(a_\mu - a_\nu)^2} \right\}_{\mu=1, \dots, n}$$

と定義される。ここで, B_d は, B の対角成分, また, $\{, \}_A$ は §1 と同じ様に定義され, たとえば,

$$\{\Psi, B\}_{A, \mu\nu} = b_{\mu\nu} \frac{\Psi_{\mu\mu} - \Psi_{\nu\nu}}{a_\mu - a_\nu} \quad (\mu \neq \nu), \quad 0 \quad (\mu = \nu)$$

等と定義される。そして、我々は、(1)に対する extended system $PY=0, dY=\Omega Y$ を得るのであるが、この system の完全積分可能条件は、 $dP=[\Omega, P], d\Omega=\Omega\wedge\Omega$ である。これを書き下せば、次の外微分式系を得る。

$$[\Phi, A]=0$$

$$[\Psi, A]+[\Phi, B]=0$$

$$dA=-2\Phi+[\Psi, B]+[\Theta, A]+[\Phi, C]$$

$$dB=-\Psi+[\Theta, B]+[\Psi, C]$$

$$dC=[\Theta, C]$$

$$d\Phi=[\Phi, \Theta]_+ + \Psi\wedge\Phi$$

$$d\Psi=[\Psi, \Theta]_+$$

$$d\Theta=\Theta\wedge\Theta$$

----- (2)

命題 (2)は、完全積分可能な外微分式系である。

この証明は、頗る複雑であり、また、その為にはブラケット $\{, \}$ に関する幾つかの性質を調べねばならないので、ここでは省略する。また §1 と同じ議論により、次の定理を示せる。(§1 で述べた形式的 monodromy が generic という条件が必要である。)

定理 微分方程式 (1) の (適当な) 解の基本系の monodromy, Stokes 係数, 形式的 monodromy が保存される為の必要かつ十分な条件は、係数 A, B, C が、非線型微分方程式系 (2) を満たすことである。

例) $P = \frac{d}{dx} + \frac{A_+}{2(x-1)} + \frac{A_-}{2(x+1)} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\eta^{\pm\frac{1}{2} + \xi}}{\eta^{\pm} - \eta^{\mp}} & \mp \eta^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\eta^{\mp\frac{1}{2} + \xi}}{\eta^{\pm} - \eta^{\mp}} \\ \pm \eta^{\mp\frac{1}{2}} \frac{\eta^{\pm\frac{1}{2} + \xi}}{\eta^{\pm} - \eta^{\mp}} & \mp \frac{\eta^{\pm\frac{1}{2} + \xi}}{\eta^{\pm} - \eta^{\mp}} \end{pmatrix}$$

η, ξ は λ の正則関数である。

この場合について、変形の方程式を計算すると、変形の作用素は、

$$\Omega = \left\{ \frac{\xi}{2\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\} d\lambda$$

であって、変形の方程式から α を消去して得られる方程式は、

$$\eta'' = \left(\frac{1}{2\eta} + \frac{1}{\eta-1} \right) (\eta')^2 - \frac{1}{\lambda} \eta' - \frac{8(\eta+1)\eta}{\eta-1}$$

である。これは Painlevé の V 型の特殊な場合である。さらに、

$$\eta = \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2 \text{ と変換すれば,}$$

$$y'' = \frac{1}{y} (y')^2 - \frac{1}{\lambda} y' + (y^3 - y')$$

を得るが、これは、Wu-McCoy の Painlevé Restricted III 型である。

(Sato-Miwa-Jimbo [9])

参考文献

- [1] L. Schlesinger, J. Reine u. Angew. Math. 141 (1912) 96-145
- [2] R. Fuchs, Math. Ann. 63 (1907) 301-321
- [3] G. D. Birkhoff, Proc of American Academy (1913) 521-568
- [4] " , Amer. Math. Soc 10 (1909) 436-470

- [5] R. Garnier, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 43 (1912) 1-73
- [6] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Longmans-Green
- [7] Wasow, *Asymptotic expansion for ordinary differential equations*, Interscience, 1965
- [8] K. Okamoto, *Funk. Ekvac.* 14 (1971) 137-152
- [9] M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo, *RIMS preprint-225* (1977)
- [10] M. Kashiwara, T. Kawai, *preprint* (1977)