数理解析研究所講究録
第347巻 1979年 1-8

$P\mathbb{C}$-foliation について

京大理 足立正久

$\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}^q$ の local analytic automorphisms の germs のつくる topological groupoid とし，$B\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ をその分類空間とする（Buffet-Lor のいみ）. differential をとることにより次の連続写像をうる：

$$\nu : \Gamma_q^{\mathbb{C}} \to GL(q, \mathbb{C}).$$

これは次の連続写像を induce する；これも同じ ν でかく：

$$\nu : B\Gamma_q^{\mathbb{C}} \longrightarrow BGL(q, \mathbb{C}).$$

この ν の homotopy fibre を $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ とかく.（$B\bar{\Gamma}_q^{\mathbb{C}}$ とかくことも多い）.

この $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ のホモトピー群について次のことがしられている：

1971 A. Haefliger [4], $\pi_1(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$, $q \geq 1$.

1974 P. Landweber [6] $\pi_i(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$, $i < q$.

1977 M. Adachi [1] $\pi_q(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$.

197? W. Thurston $\pi_2(F\Gamma_1^{\mathbb{C}}) = 0$.

1971 R. Bott [2]. $\pi_{2q+1}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) \neq 0$.

そこで次のことが予想される。

予想： $\pi_{q+r}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$， $0 < r \leq q-2$.

この予想が正しければ，"偶数次元の open manifold の上の almost complex structure は homotopic にうごかせば integrable になる" ことがわかる。(Haefliger の classification theorem より).

上の予想に近ずくために PC-manifold の上に PC-foliation という概念を導入して考えてみたがうまくいかなかった。

1. PC-foliations on PC-manifolds.

M を n 次元の C^ω-manifold，$n = 2p+q$ とする。

Def. M の上の <u>PC-structure of type</u> (p,q) とは，$T(M)$ の complexification $\mathbb{C}T(M)$ の p 次 subbundle S で次の条件を満足するもの：

i) $S \cap \bar{S} = \{0\}$

ii) $T(M) \sim \xi^{2p} \oplus \eta^q$， $\mathbb{C}T(M) \sim (S \oplus \bar{S}) \oplus (\eta^q \otimes \mathbb{C})$，

iii) $[\Gamma(S), \Gamma(S)] \subset \Gamma(S)$，

こゝで $\Gamma(S) = \{S$ の C^∞-cross-section$\}$.

Note： PC-structure については Tanaka [7] を参照。Kuranishi [5] では CR-structure とよんでいる。

S を M の上の PC-structure of type (p,q) としたとき，(M, S) を <u>PC-manifold of type</u> (p,q) とよぶ。

例1. M: C^ω-manifold $\Rightarrow$ M は PC-manifold of type $(0.n)$ と考えられる.

例2 M: complex manifold of complex dimension n

$\Rightarrow$ M: PC-manifold of type $(n.0)$ と考えられる.

例3. $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$, $n = 2p+q$.

$\Rightarrow$ M は自然に PC-structure of type $(p.q)$ をもつ.

次に PC-structure に関する基本的な性質をのべる. (cf. Kuranishi [5], Tanaka [7]).

Def. (M, S_M), (V, S_V) を PC-manifold とする. $f: M \to V$ を C^ω-map とする. f が次の条件を満足するとき, f を <u>PC-map</u> あるいは <u>holomorphic</u> という:

$$df: T(M) \to T(V), \quad \mathbb{C}(df): \mathbb{C}T(M) \to \mathbb{C}T(V),$$

$$\mathbb{C}(df)(S_M) \subset S_V.$$

<u>Proposition 1</u>. M を PC-manifold of type $(p.q)$, $n=2p+q$ とする.

i) $\exists (j, W)$: W: complex manifold of $\dim_{\mathbb{C}}$ $p+q$,

$j: M \to W$, holomorphic imbedding,

such that $\forall V$: complex manifold,

$\forall f: M \to V$, holomorphic map,

$\exists \tilde{f}: W \to V$, holomorphic map,

次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ M \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V. \end{tikzcd}$$

ii) 上のような (j, W) は germ の意味で unique: すなわち，(j, W)，(j', W') と2つあったとすると，

$j(M) \subset {}^{\exists}U \subset W$,

$j'(M) \subset {}^{\exists}U' \subset W'$,

$\exists\, h : U \to U'$, biholomorphic homeo.

次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} & U \subset W \arrow[d, "h", "\wr"'] \\ M \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "j'"'] & U' \subset W'. \end{tikzcd}$$

上の (j, W)，あるいはその germ を M の <u>$P\mathbb{C}$-化</u> とよび $P\mathbb{C}(M)$ とかく。また 上の $\tilde{f}$ を f の <u>$P\mathbb{C}$-化</u> とよび $P\mathbb{C}(f)$ とかく。

例1. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, n : even.

$$M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}}.$$

M^n を上のように $P\mathbb{C}$-manifold of type $(\frac{n}{2}, 0)$ と考えると，$P\mathbb{C}(M^n) = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}} - \{0\}$.

例2. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^2 = (S^{n-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, n : even.

M はしぜんに $P\mathbb{C}$-structure of type $(\frac{n}{2}, 1)$ をもつ。このとき、$P\mathbb{C}(M) = (\mathbb{C}^{\frac{n}{2}} - \{0\}) \times \mathbb{C}^1$.

<u>Proposition</u> 2. (M, S) を $P\mathbb{C}$-manifold of type (p, q) とする。(j, W) を (M, S) の $P\mathbb{C}$-化とする。このとき、

$$j^* T(W) \sim {}'\xi_{\mathbb{C}} \oplus \eta^q \oplus \mathbb{C}, \quad (\text{complex vector bundle として}),$$

ここで $T(M) \sim \xi^{2p} \oplus \eta^q$, ${}'\xi_{\mathbb{C}}$ は ξ^{2p} の complex reduction.

Remark. (M, S) : $P\mathbb{C}$-manifold of type (p, q), U を M の open set とする。このとき、U へしぜんに $P\mathbb{C}$-structure of type (p, q) が入る。

<u>Definition</u> (M, S) : $P\mathbb{C}$-manifold of type (p, q),

V : complex manifold.

$f : M \to V$. $P\mathbb{C}$-map.

とする。f が次の条件を満足するとき、f を <u>$P\mathbb{C}$-submersion</u> とよぶ: $P\mathbb{C}(f) : W \to V$ が holomorphic submersion, ここで (j, W) は M の $P\mathbb{C}$-化.

<u>Definition</u> (M, S) を $P\mathbb{C}$-manifold of type (p, q) とする。$\mathcal{G} = \{(V_\alpha, g_\alpha) ; \alpha \in A\}$ が <u>$P\mathbb{C}$-foliation of codim. r on M</u> とは、

i) $M = \bigcup_\alpha V_\alpha$, open covering.

ii) $g_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{C}^r$, $P\mathbb{C}$-submersion,

iii) $V_\alpha \cap V_\beta \neq \phi$ ならば、continuous map $g_{\alpha\beta}$:

$V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow \Gamma_r^{\mathbb{C}}$ が存在して,

$$g_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_\beta(x), \qquad x \in V_\alpha \cap V_\beta .$$

2つの P$\mathbb{C}$-foliation of codim. r on M の間の equivalence はふつうの foliation のときと同様に定義する。

M を P$\mathbb{C}$-~~manifold~~ manifold of type (p, q), (j, W) を M の P$\mathbb{C}$-化とする。

Lemma 1. $\mathcal{F}$ が holomorphic foliation of codim. r on W
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|M = j^*\mathcal{F}$ は P$\mathbb{C}$-foliation of codim. r on M.

Proof. やさしい。

Lemma 2. $\left\{ \begin{array}{l} \text{holomorphic foliation of codim. } r \\ \text{on } W \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \overset{1to1}{\longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{P}\mathbb{C}\text{-foliation of} \\ \text{codim. } r \text{ on } M \end{array} \right\} \Big/ \sim$

$$\{\mathcal{F}\} \longmapsto \{\mathcal{F}|M = j^*\mathcal{F}\}$$

は bijective, ただし左の ∼ は germ のいみ。

Proof. inj: 一致の定理

surj: Γ-foliation のときとほゞ同様にしてできる。Prop. 1 を用いる。

2. はじめにのべた予想を示すには「P$\mathbb{C}$-foliation に対する Gromov-Phillips の transversality theorem」が Key となる。これが証明できない。反例もみつからない。

3. 偶数次元 closed manifold で almost complex structure はもつが, complex structure をもたないものがあることがしられている (cf. van de Ven [8], S.-T. Yau [9]).

References

[1] M.Adachi, A note on complex structures on open manifolds, J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 35-46. J.

[2] R. Bott, On Lefschetz formula and exotic characteristic classes, Symposia Math., 10(1972), 95-105.

[3]A. Haefliger, Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology, 9(1970), 183-194.

[4] A. Haefliger, Homotopy and integrability, Lecture Notes in Math. Springer, 197(1971), 133-163.

[5] M. Kuranishi, Isolated singularities and $\bar{\partial}_b$ 京大数研レクチャーノート.

[6]P. Landweber, Complex structures on open manifolds, Topology, 13(1974), 69-75.

[7] N. Tanaka, A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds, Lecture Notes in Math. Kyoto Univ., 9(1975).

[8] A. van de Ven, On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, Proc. Nat. Acd. Sci. USA., 55(1966),

1624-1627.

[9] S.-T. Yau, Parallelizable manifolds without complex structure, Topology, 15(1976), 51-53.