数理解析研究所講究録
第 347 巻 1979 年 19-26

複素解析的特異葉層構造

北大 教養　諏訪 立雄

葉層構造の特異点を調べてる（generic な特異点を求める，residue を求める，etc.）ために，その変形を考える．§1 では変形理論の outline をのべ，§2 では局所的葉層構造について考察する．

§1．特異葉層構造の変形．

M を（連結）複素多様体とし，$\mathcal{O}_M$，Ω_M および Θ_M でそれぞれ M 上の正則関数，正則 1-形式および正則ベクトル場の芽の層を表わす．まず特異葉層構造を次のように定義する（[2]，[3] 参照．ここで用いる積分可能条件は [2] のより弱い）．

(1.1) 定義．M 上の（特異）葉層構造とは，Ω_M の部分層 F で次の条件 a)，b)，c) をみたすものをいう：

a) F は連接．

$\Omega_F = \Omega_M / F$ とおき，これをFの葉に沿った正則1-形式の芽の層という．

$S = \{ p \in M \mid \Omega_{F,p}$ は$\mathcal{O}_{M,p}$-自由加群でない$\}$

とおくとSはMの解析的集合となる．これをFの特異集合という．

b) Fは積分可能，すなわち $d(F|M-S) \subset (\Omega_M \wedge F)|M-S$.

従ってFは$M-S$上に普通の意味の葉層構造を定義する．これの余次元をFの余次元という．

c) Fは full，すなわち，Mの任意の開集合Uに対し，

$\omega \in \Gamma(U-S, F)$ ならば $\omega \in \Gamma(U, F)$.

(これは reduced varieties のみを考えることに対応する)．

(1.2) 定義．M上の葉層構造Fが Haefliger 型であるとは，Mの各点の近傍でFの局所生成系として完全1-形式がとれること．

M上の葉層構造Fの annihilator F^aを，前層 $U \longmapsto \{ \gamma \in \Gamma(U, \Theta_M) \mid {}^\forall \omega \in \Gamma(U, F),\ \omega(\gamma) = 0 \}$ で定義される層とする．明らかに $F^a \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ である．F^aの annihilator $(F^a)^a$を同様に定義するとFが full であることから $(F^a)^a = F$ であることが分る．

(1.3) 定義. M上の葉層構造Fの変形は次の I), II) からなる:

I) Mの変形 $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} T$ (点 $0 \in T$ に対し $\pi^{-1}(0) = M$ としておく).

II) $\mathcal{M}$上の葉層構造$\mathcal{F}$で次をみたすもの:

a) $\mathcal{M}$の固有な解析的集合S(一般に$\mathcal{F}$の特異集合より大きい)が存在し,

$$\mathcal{F}^a/\mathcal{F}^a \cap \Theta_{\mathcal{M}/T}\big|_{\mathcal{M}-S} = \pi^*\Theta_T|_{\mathcal{M}-S}.$$

b) $\mathcal{F}|_M$ (層の制限ではなく, 形式の制限) $= F$.

正則写像による葉層構造のひきもどし, versal変形等の概念は普通に定義される. $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ が (M, F) の変形のとき, 条件 a), b) を用いると次の完全可換図式を得る:

$$(1.4)\quad \begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \pi^*\Omega_T\otimes\mathcal{O}_M \arrow[r] & \Omega_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_M \arrow[r]\arrow[u] & \Omega_F \arrow[r]\arrow[u] & 0\\
0 \arrow[r] & \pi^*\Omega_T\otimes\mathcal{O}_M \arrow[r]\arrow[u, equal] & \Omega_{\mathcal{M}}\otimes\mathcal{O}_M \arrow[r]\arrow[u] & \Omega_M \arrow[r]\arrow[u, "*"'] & 0\\
 & & \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_M \arrow[r, "\sim"]\arrow[u] & F \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$(\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}})$

第一行より写像

$$(1.5)\qquad \rho : T_{T,o} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$$

を得る（$T_{T,o}$ は T の o における正則接空間）。これを無限小変形写像という。$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ の元が obstruct されてないとは、その元がある (M, F) の変形の無限小変形写像の像に入っていることをいう。もし $\mathcal{O}_M$-加群 Ω_F が局所自由分解を持てば（例えば、M が射影代数的, Stein etc.）群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ および写像 (1.5) は具体的に表わすことが出来る（表現は用いる局所自由分解にはよらない）。$F = (df_1, \cdots, df_r)$ が局所的 Haefliger 葉層構造であるときは、F の変形理論は関数系 $(f_1, \cdots, f_r)$ の変形理論あるいは $f_1, \cdots f_r$ で生成される ideal で定義される variety の変形理論（例えば [1] [6] [10] [11] 等）と同値である。また $f: X \to Y$ が複素多様体の間の正則写像のとき、$F^a = \Theta_{X/Y}$ とすると F の変形理論は f の変形理論（[5]）と同値である。

Ext のスペクトル列から次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^1(M, F^a) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M) & \to & H^0(M, \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)) & \to & H^2(M, F^a) \\ (1.6)\quad & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & H^1(M, \Theta_M) & \simeq & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_M, \mathcal{O}_M) & & & & \end{array}$$

2行目は M のみの変形, $H^1(M, F^a)$ は F の "equisingular" な変形を表わしている。

§2. 局所的特異葉層構造. $M=U$ を $\mathbb{C}^n$ の原点 0 を中心とする多重円板とし，$\mathcal{F}$ を U 上の余次元 q の葉層構造とする．さらに $\mathcal{F}$ は完全交叉型とする，すなわち $\mathcal{F}$ は q 個の 1-形式 $\omega_1, \cdots, \omega_q$ で生成され generic な点 $z \in U$ で $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q(z) \neq 0$ とする．$\mathcal{F}$ の特異集合 S は $S = \{z \in U \mid \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q(z) = 0\}$ と書ける．(1.1) b) の条件は

(2.1) $\quad d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, q$

と書け，さらに (1.1) c) より $\operatorname{codim} S \geq 2$ であることが分る．(1.6) により $\mathcal{F}$ の変形を調べるには，層 $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M)$ を調べればよい．この層は次のように表わせる．

(2.2)
$$\begin{array}{ccccccc} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\Omega_M, \mathcal{O}_M) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_M) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M) & \to & 0 \\ \wr\| & & \wr\| & & & & \\ \Theta_M & & \mathcal{O}_M^q & & & & \end{array}$$

関数系 $(h_1, \cdots, h_q) \in \mathcal{O}_M^q$ の $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_M)$ の中での像を $[h_1, \cdots, h_q]$ で表わす．

ここで，次の Malgrange - Moussu の定理を引用しておく．

(2.3) 定理 ([4][7][8][9]). $\operatorname{codim} S \geq 3$ なら $\mathcal{F}$ は Haefliger 型．

この定理の証明は変形理論の立場から次のように解釈できる．すなわち，$\operatorname{codim} S \geq 3$ なら q-個の parameter $(t_1, \cdots, t_q)$ による $\mathcal{F}$ の変形 $\mathfrak{F}$ で，$\rho(\frac{\partial}{\partial t_i})(\omega_j) = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq q,$

となるものが作れる. $\tilde{\mathcal{F}}$ は非特異葉層構造だから Frobenius の定理により Haefliger 型, 従ってその制限である $\mathcal{F}$ もそうである.

(2.3) により, codim $S = 2$ が最も興味ある場合である. 一般に $\mathcal{F}$ の一次無限小変形(の同型類)全体が, どのような集合で表わされるかを考える. まず

(2.4) $\quad \tau \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0$

をみたす $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された正則 2-形式 τ に対し, $H^1(U-S, \mathcal{O}_U^{q^2}) \simeq H^2_S(U, \mathcal{O}_U^{q^2})$ の cohomology 類 $[\tau]$ を次のようにして作る. $U-S$ の小多重円板 U_λ による開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとると (2.4) より, 各 U_λ 上で $\tau = \sum_{i=1}^{q} \eta_i^\lambda \wedge \omega_i$ と書ける, ただし η_i^λ, $i=1,\cdots,q$, は U_λ 上の正則 1-形式である. 従って $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で

(2.5) $\quad \eta_i^\lambda - \eta_i^\mu = \sum_{j=1}^{q} \psi_{ij}^{\lambda\mu}\omega_j, \qquad \psi_{ij}^{\lambda\mu} = \psi_{ji}^{\lambda\mu}$

と書ける, ただし $\psi_{ij}^{\lambda\mu}$ は $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の正則関数で cocycle 条件をみたす. $\Psi = \{\Psi^{\lambda\mu}\}$, $\Psi^{\lambda\mu} = \{\psi_{ij}^{\lambda\mu}\}$ とおけば, Ψ の定める $H^1(U-S, \mathcal{O}_U^{q^2}) \simeq H^2_S(U, \mathcal{O}_U^{q^2})$ の cohomology 類は η, ψ のとり方によらないことが示せる. これを $[\tau]$ と書くことにする.

(2.6) 定理. $\mathcal{F}$の一次無限小変形の同型類全体

$$\simeq \left\{ [\ell]=[\ell_1,\cdots,\ell_q] \in \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O}_n) \,\middle|\, \begin{pmatrix} [\ell][d\omega_1] \\ \vdots \\ [\ell][d\omega_q] \end{pmatrix} = 0 \text{ in } H^2_S(U, \mathcal{O}_U^{q^2}) \right\}.$$

(2.7) 例. $n=2$, $q=1$, $\mathcal{F}=\{\omega\}$, $\omega = z_2^q dz_1 - z_1^p dz_2$, p, q は自然数. このときは各一次無限小変形が変形であるように選び, 次の $(p-1)(q-1)$ 個の parameter $\{t_{rs}\}$, $1 \le r \le p-1$, $1 \le s \le q-1$, を含む versal 変形 $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\omega}\}$ を得る:

$$\tilde{\omega} = \Big(z_2^q - \sum_{r,s}(p-r) z_1^{r-1} z_2^s t_{rs}\Big) dz_1 - \Big(z_1^p + \sum_{r,s}(q-s) z_1^r z_2^{s-1} t_{rs}\Big) dz_2 + \sum_{r,s} z_1^r z_2^s dt_{rs}.$$

References

[1] M. Artin, Deformations of Singularities, Tata Institute, Bombay, 1976.

[2] P. Baum, Structure of foliation singularities, Advances in Math. 15, 361-374 (1975).

[3] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Diff. Geom. 7, 279-342 (1972).

[4] S. Guelorget et R. Moussu, Le théorème de Frobenius pour un pli intégrable, C. R. Acad. Sc. Paris, 282, 455-458 (1976).

[5] E. Horikawa, On deformations of holomorphic maps I, II, J. Math. Soc. Japan, 25, 372-396 (1973), 26, 647-667 (1974).

[6] A. Kas and M. Schlessinger, On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 23-29 (1972).

[7] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1, Publ. I.H.E.S. 46 (1976).

[8] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2, Invent. Math. 39, 67-89 (1977).

[9] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Ann. Inst. Fourier, 26, 171-220 (1976).

[10] M. Schlessinger, On rigid singularities, Rice Univ. Studies, 59, 147-162 (1973).

[11] G.N. Tjurina, Locally semiunversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR, 33, 967-999 (1970).