数理解析研究所講究録
第 347 巻 1979 年 67-83

T^2上のfoliated S^1-bundleによって代表される $BDiff(S^1)$ の2-cycle について.

東大 理　坪井 俊

1. このノートでは、T^2上のfoliated S^1-bundleによって代表される$BDiff(S^1)$の2-cycleがhomologous to zeroになるための、いくつかの十分条件を与え、証明の概略を述べる。それらはholonomy mapについての解析的な、幾何的な、あるいは代数的な条件である。

[14]において、ThurstonはGodbillon-Vey準同型 $G.V.: H_3(B\bar{\Gamma}_1^r, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(r \geq 2)$ が全射であることを示した。($B\bar{\Gamma}_1^r$は$\bar{\Gamma}_1^r$ structureの分類空間。) G.V.が全単射であるという"楽観的"予想について考える。Godbillon-Vey数は3次元多様体の余次元1のfoliationのcobordism不変量で、G.V.は余次元1の3次元C^r-foliated cobordism群 $F\Omega_{3,1}^r$ $(r \geq 2)$ から$\mathbb{R}$への全射である。

次のfoliationについてはGodbillon-Vey数＝0が示され，さらにfoliated cobordant to zeroが示されている。

① S^1上のfiber bundleのbundle foliation。

② 至るところ0でない閉1-形式で定義されたfoliation。

③ S^3のReeb foliation。(Mizutani[6], Sergeraert[12])

④ 3次元多様体M^3にspinnable structureを用いて構成されたfoliation (Fukui[1], Oshikiri[11]) (⑤も)

⑤ M^3上のcobordant to zeroのfoliationをtransverse closed curveの管状近傍においてfoliated surgeryして得られるfoliation

[2]においてHermanはT^2上のfoliated S^1-bundleのG.V.数＝0を示した。このfoliationがcobordant to zeroかという問題を考える。(最近，holonomyのないfoliation (Morita-Tsuboi[7]) 深度有限，可換holonomyのfoliation (Nishimori[10]) について，G.V.＝0が示された。これらのfoliationのcobordismを考える時にも，我々の問題はさけて通れない。)

多様体M上のfoliated S^1-bundleとは，M上のS^1-bundleでその全空間にfiberにtransverseなfoliationをもつものである。このようなfoliationは(total) holonomy：$\pi_1(M,*) \to \mathrm{Diff}(S^1)$ (準同型) $(*\in M)$によって決定される。我々は，transversely orientedな

foliationのみを考える。このとき、holonomyは$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$, S^1のorientation preserving C^r-diffeomorphism全体のなす群への写像となる。T^2上のfoliated S^1-bundleの全空間はT^3であり（Wood[16]）、このようなfoliationはup to topological equivalenceでは分類されている。(Moussu-Roussarie[8])

$H_3(B\bar{\Gamma}^r_1)$, $\mathcal{F}\Omega^r_{3,1}$と$H_2(\mathrm{Diff}^r_+(S^1))$の関係について述べておく。ここで、$H_2(\mathrm{Diff}^r_+(S^1))$は群$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$の2次元homology群である。$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$をdiscrete topologyで考えたものを$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta$と書くと、$C^r$-foliated S^1-bundleは$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta$-bundleと考えることができる。$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta$-bundleの分類空間$B\,\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta$が定義され、$H_*(B\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta)=H_*(\mathrm{Diff}^r_+(S^1))$である。Orientedな2次元閉多様体上の$C^r$-foliated S^1-bundleを、そのtotal spaceのtransversely orientable foliation ($\bar{\Gamma}^r_1$-structure)とみなすことは、準同型$H_2(B\mathrm{Diff}^r_+(S^1)^\delta)\longrightarrow H_3(B\bar{\Gamma}^r_1)$をひきおこす。Mather[4]によれば、同型写像、$H_2(B\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}))\longrightarrow H_3(B\bar{\Gamma}^r_1)$が存在する。ここで$\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R})$はある有界区間をのぞいて恒等写像であるような、$C^r$-diffeomorphismのなす群である。$\mathbb{R}$を$S^1$の1つの開区間とみなすことにより、準同型$H_2(\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}))\longrightarrow H_2(\mathrm{Diff}^r_+(S^1))$を得、次の図式は可換である

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})) \cong H_2(B\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})) & \searrow & \\ \downarrow & & H_3(B\overline{\Gamma}_1^r) \\ H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1)) \cong H_2(B\mathrm{Diff}_+^r(S^1)^\delta) & \nearrow & \end{array}$$

このことから、$H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1)) \longrightarrow H_3(B\overline{\Gamma}_1^r)$ は全射である。Godbillon-Vey 準同型は $H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1))$ $(r \geq 2)$ からの写像と考えられる。$B\mathrm{Diff}_+^r(S^1)^\delta$ の 2-cycle がある 3-chain の boundary であれば、この 2-cycle 上で Godbillon-Vey は 0 である。これは、ほぼ foliated S^1-bundle としての zero への cobordism を構成していることによっている。

我々は問題を次のような holonomy 準同型の拡張の問題と考える：

> 準同型 $\varphi : \pi_1(T^2, *) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ が与えられた時、$T^2 = \partial W^3$ となる 3次元多様体 W と、準同型 $\tilde{\varphi} : \pi_1(W, *) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ で次が可換になるものを構成せよ。
>
> $$\begin{array}{ccc} \pi_1(T^2, *) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathrm{Diff}_+^r(S^1) \\ \downarrow{\scriptstyle i_\#} & \nearrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} & \\ \pi_1(W^3, *) & & \end{array}$$
>
> （但し、$* \in T^2 = \partial W^3 \overset{i}{\hookrightarrow} W^3$.）

このとき、T^2 と φ で代表される $B\mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ の 2-cycle は homologous to zero である。

群 G の homology は次の complex の homology として定義される。

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G\times G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G\times G\times G] \xleftarrow{\partial} \cdots\cdots$$

$(f_1, \cdots, f_n) \in \mathbb{Z}[G^n]$ のとき

$$\partial(f_1, \cdots, f_n) = (f_2, \cdots, f_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(f_1, \cdots, f_i f_{i+1}, \cdots f_n) + (-1)^n(f_1, \cdots, f_{n-1})$$

$(f) \in \mathbb{Z}[G]$ のとき $\partial(f) = 0$

$f_1, f_2 \in G$ に対し、$f_1 f_2 = f_2 f_1$ ならば $(f_1, f_2) - (f_2, f_1)$ は 2-cycle である。$\pi_1(T^2, *)$ の oriented な生成元を α, β とするとき、準同形 $\varphi : \pi_1(T^2, *) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ は $H_2(B\mathrm{Diff}_+^r(S^1)^\delta) = H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1))$ の $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$ の class を代表する。我々はこの class を $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}$ と書く。

我々の定理、補題は、ある条件の下で $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$ を主張する。これは原理的にはある 3-chain で boundary $= (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$ となるものを構成することであるが、直接 3-chain をつくるのは容易ではない。最初に基本的な補題を述べ、後に定理を述べる。

2. 次に述べる補題は、しばしば使われる。内容は foliated bundle としての cobordism を作る操作と結びついている。

<u>補題 1</u>　$f, g, h \in \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, $f\circ g = g\circ f$ とする。このとき、$\{f^m, g^n\} = mn\{f, g\}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$.

$$\{h\circ f\circ h^{-1}, h\circ g\circ h^{-1}\} = \{f, g\}。$$

<u>補題2</u>　$f, g, g_1, g_2, \cdots, g_n \in \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, $f\circ g = g\circ f$, $g = g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_n$, $f\circ g_i = g_i\circ f$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。このとき、$\{f, g\} = \{f, g_1\} + \{f, g_2\} + \cdots + \{f, g_n\}$,

$$\{g, f\} = \{g_1, f\} + \{g_2, f\} + \cdots + \{g_n, f\}。$$

<u>証明</u>　D^2 内に disjoint な n 個の円板 $D_1, \cdots, D_n$ をとり、$\overline{(D^2 - \bigcup_{i=1}^n D_i)} \times S^1$ 上の foliated S^1-$[\mathbb{R}$-$]$ bundle を考えればよい。

$f \in \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$ に対し、$\mathrm{Supp}\, f = \overline{\{x \mid f(x) \neq x\}}$ とする。

<u>補題3</u>　$f, g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R})]$ に対し、どの2つも内点を共有しない有限個の閉区間 $I_1, \cdots, I_s, J_1, \cdots J_\ell$ があって、$\mathrm{Supp}\, f \subset \bigcup_{i=1}^s I_i$, $\mathrm{Supp}\, g \subset \bigcup_{j=1}^\ell J_j$ とする。このとき $f\circ g = g\circ f$ で、$\{f, g\} = 0$。

<u>証明</u>　Sergeraert [12] により、$H_1(\mathrm{Diff}_\infty^\infty[0,1]) = 0$ である。ここで、$\mathrm{Diff}_\infty^\infty[0,1] = \{f \in \mathrm{Diff}^\infty[0,1] \mid j_0^\infty f = j_0^\infty id, j_1^\infty f = j_1^\infty id\}$, j_p^k は点 P における k-jet を表わす $(k=0,1,\cdots\infty)$。ゆえに、$g = [h_1, h_2][h_3, h_4]\cdots\cdots[h_{2g-1}, h_{2g}]$, ここで $h_i \in \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, $\mathrm{Supp}\, h_i \subset \bigcup_{j=1}^\ell J_j$ $(i=1,\cdots,2g)$、と書ける。Σ_g を genus g の closed oriented 2-manifold, D^2 をその上の円板として、$S^1\times(\Sigma_g - \mathrm{Int}\, D^2)$ 上の foliated S^1-$(\mathbb{R}$-$)$ bundle を考えればよい。

<u>注意</u>　$f, g \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $[\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R})]$ のときは $\mathrm{Supp}\, f \subset \bigcup_{i=1}^{s} I_i$, $\mathrm{Supp}\, g \subset \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Int}\, J_i$ を仮定すれば、$\{f, g\} = 0$ である。証明は Mather [5] により $H_1(\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R})) = 0$ であることを用いて同様。

<u>補題4</u>　準同型 $\varphi : \pi_1(T^2, *) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$, $[\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R})]$, に対し、$\pi_1(T^2, *)$ の２組の oriented な生成元 $\alpha, \beta ; \alpha', \beta'$ について

$$\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = \{\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\beta'}\}.$$

<u>補題5</u>　$f, g \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $[\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R})]$, $f \circ g = g \circ f$, $(m, n) = 1$ となる整数 m, n に対し $f^m g^n = id$ とする。このとき、

$$\{f, g\} = 0.$$

3. S^1 の微分同相、区間の微分同相について次の補題を使う。ともに固定点のまわりの状況を記述するものである。

<u>補題6</u>　$f, g \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $(r \geq 2)$, f, g はともに固定点をもち, $f \circ g = g \circ f$ とする。$[a, b]$ を S^1 内の区間とし、$g(a) = a$, $g(b) = b$, g は (a, b) に固定点をもたず、$f|_{[a,b]} \neq id|_{[a,b]}$ とする。このとき、$f(a) = a$, $f(b) = b$, f は (a, b) に固定点をもたない。

<u>証明</u> (Kopell [3], Herman [2])

<u>補題7</u> $[a,c]$ を1つの閉区間，$b\in(a,c)$ とする。$f, g\in \mathrm{Diff}_+^\infty[a,c]$ $f\circ g=g\circ f$ とする。$g(a)=a$，$g(b)=b$，$g(c)=c$，g は (a,b) (b,c) に固定点をもたないとする。 このとき，

i) $f(a)=a$，$f(b)=b$，$f(c)=c$。

ii) $f\neq id \Rightarrow \max\{k \mid j_b^k f = j_b^k id\} = \max\{k \mid j_b^k g = j_b^k id\}$。

iii) $j_b^\infty g \neq j_b^\infty id$ かつ $[a,b]$ 上で $f^m g^n = id$ ならば $[b,c]$ 上で $f^m g^n = id$。

<u>証明</u> (Moussu-Roussarie [8])

4. T^2 上の foliated S^1-bundle の foliation の leaf がすべて proper のとき，次の定理を得る。

$f\in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ $[\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{R})]$ に対し，$\mathrm{Fix}\,f=\{x \mid f(x)=x\}$，$\mathrm{Fix}^\infty f=\{p\in \mathrm{Fix}\,f \mid j_p^\infty f = j_p^\infty id\}$ とする。ともに閉集合である。$x\in S^1(\mathbb{R})$ に対し，$\overline{\mathrm{Orb}}_{\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}}(x)=\overline{\{\varphi_\alpha^m \varphi_\beta^n(x) \mid m, n\in\mathbb{Z}\}}$ とする。

<u>定理1</u> $\varphi_\alpha, \varphi_\beta\in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha$，$\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ は固定点をもち，$\overline{\mathrm{Orb}}_{\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}}(x)$ は内点をもたぬ $(\forall x\in S^1)$ とする。さらに，$\mathrm{Fix}^\infty\varphi_\alpha \cap \mathrm{Fix}^\infty\varphi_\beta$ の連結成分の数が有限であるとする。このとき，$\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}=0$。

<u>注意</u> $\overline{\mathrm{Orb}}_{\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}}(x)$ が内点をもたない事は，今の場合，foliated bundle の fiber $S^1=\pi^{-1}(*)$ の点 x を通る leaf は proper leaf であることを意味している。

<u>注意</u> $\mathrm{Fix}\,\varphi_\alpha \cap \mathrm{Fix}\,\varphi_\beta$ の元は foliation の compact closed leaf と

一対一に対応する。補題7により、このcompact leafがl次の接触をしているということが定義できる。$\mathrm{Fix}^\infty\varphi_\alpha \cap \mathrm{Fix}^\infty\varphi_\beta$の連結成分は$\infty$次接触のcompact leaf全体の集合の連結成分に対応する。

注意　$\mathrm{Fix}^\infty\varphi_\alpha \cap \mathrm{Fix}^\infty\varphi_\beta$の連結成分の数が有限でない例はある。

証明の概略.　$\mathrm{Fix}^\infty(\varphi_\alpha) \cap \mathrm{Fix}^\infty(\varphi_\beta) \neq \phi$とする。$\mathrm{Fix}^\infty(\varphi_\alpha) \cap \mathrm{Fix}^\infty(\varphi_\beta)$の各連結成分に一点ずつをとり、$S^1$を有限個の区間$\Delta_i$ $(i=1,\cdots,k)$に分割する。

$S^1=\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i$, Δ_i: 閉区間 $(i=1,\cdots,k)$ $\mathrm{Int}\Delta_i \cap \mathrm{Int}\Delta_j=\phi$ $(i\neq j)$。

$f_i, g_i \in \mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ $(i=1,\cdots,k)$ を次で定義する。

$$\begin{cases} f_i|_{\Delta_i}=\varphi_\alpha|_{\Delta_i} \\ f_i|_{S^1-\Delta_i}=id|_{S^1-\Delta_i} \end{cases} \qquad \begin{cases} g_i|_{\Delta_i}=\varphi_\beta|_{\Delta_i} \\ g_i|_{S^1-\Delta_i}=id|_{S^1-\Delta_i} \end{cases}$$

このとき、$\varphi_\beta=g_1\circ\cdots\circ g_k$, $\varphi_\alpha\circ g_i=g_i\circ\varphi_\alpha$ $(i=1,\cdots,k)$ ゆえ補題2により、$\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}=\sum_{i=1}^{k}\{\varphi_\alpha,g_i\}$。各$i$について、

$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha f_i^{-1}\circ f_i$, $\varphi_\alpha f_i^{-1}\circ g_i=g_i\circ\varphi_\alpha f_i^{-1}$, $f_i\circ g_i=g_i\circ f_i$ ゆえ

$\{\varphi_\alpha,g_i\}=\{\varphi_\alpha f_i^{-1},g_i\}+\{f_i,g_i\}$。ここで補題3により、

$\{\varphi_\alpha f_i^{-1},g_i\}=0$ である。

整数 m_i,n_i $(m_i,n_i)=1$ に対し、$f_i^{m_i}g_i^{n_i}=id$ をいえば、補題5により、$\{f_i,g_i\}=0$ がいえて、$\{\varphi_\alpha\ \varphi_\beta\}=0$となる。

これは、次のように示される。$S^1-\mathrm{Fix}f_i$は高々可算個の開区間のdisjoint unionである。$S^1-\mathrm{Fix}f_i=\bigsqcup_\lambda I_\lambda$。all leaves properゆえ Nishimori [9] により、各I_λで 整数 $m_{i\lambda}$ $n_{i\lambda}$

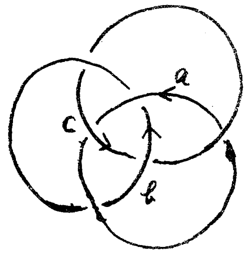
が存在し、$f_i^{m_{i\lambda}}\circ g_i^{n_{i\lambda}}=id$ である。ところが、補題6, 7と、Δ_i の定義により、$\mathrm{Int\,Supp}\,f_i\cap \mathrm{Fix}^\infty f_i=\phi$ が示されることとから、$m_{i\lambda}$ $n_{i\lambda}$ は λ によらず一定である。$f_i^{m_i}g_i^{n_i}=id$.
$\mathrm{Fix}^\infty\varphi_\alpha\cap\mathrm{Fix}^\infty\varphi_\beta=\phi$ のときも、同様にして、整数 m, n $(m,n)=1$ に対し、$\varphi_\alpha^m\circ\varphi_\beta^n=id$ となり、$\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}=0$ を得る。

5. 定理1は Mather [5], Sergeraert [9] の微分同相の群の $H_1=0$ という結果によっている。T^2 上の foliated S^1-bundle が dense leaf を持つ場合は、本質的に $H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1))$ の問題となる。$T^2=\partial W^3$ のとき、$H_1(T^2)\longrightarrow H_1(W^3)$ は単射にはならない。cobordism は $\pi_1(W,*)$ の非可換性により得られる。定理2, 3, 4では dense leaf をもつ場合をあつかう。定理2, 3では次の補題を使う。

<u>補題8</u> ξ を S^1 上の C^∞-vector 場とする。ξ の time t map を f_t と書く。$t\geq 2$ t に対し $t=k+\frac{1}{k}$ となる k をとる。任意の実数 s に対し、$gf_sg^{-1}=f_{ks}$ となる $g\in\mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ が存在したとする。このとき、$H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1))$ の元として、$\{f_1,f_t\}=0$。

<u>証明</u> 補題1により $\{f_1,f_{\frac{1}{k}}\}=\{gf_1g^{-1},gf_{\frac{1}{k}}g^{-1}\}=\{f_k,f_1\}=-\{f_1,f_k\}$。ゆえに $\{f_1,f_t\}=\{f_1,f_{k+\frac{1}{k}}\}=\{f_1,f_k\}+\{f_1,f_{\frac{1}{k}}\}=0$。

<u>注意</u> これを実現する cobordism. W. $\partial W = T^2$ は Borromean rings の管状近傍の補集合 V を使って構成できる。$\pi_1(V,*)$ の meridian をまわる元を a, b, c, longitude をまわる元を A, B, C とするとき、



$$\pi_1(V,*) = (a, b, c, A, B, C : cb^{-1}c^{-1}b = A, ac^{-1}a^{-1}c = B, ba^{-1}b^{-1}a = C$$
$$aA = Aa,\ bB = Bb,\ cC = Cc\ )$$

と書かれる。準同型 $\varphi : \pi_1(V,*) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ を考えると、$\{\varphi_a, \varphi_A\} + \{\varphi_b, \varphi_B\} + \{\varphi_c, \varphi_C\} = 0$ を得る。仮定により、$\varphi_a = f$, $\varphi_A = f_{t-2}$, $\varphi_b = g$, $\varphi_B = id$, $\varphi_c = f_{k+1}$, $\varphi_C = f_{t-k}$ とするような φ は well defined. b, B, c, C のところに $D^2 \times S^1$ を適当にはめこめば求める W を得る。

6. 次の定理は T^2 上の C^∞-foliated S^1-bundle で. compact leaf をもち. ∞ 次の接触をする compact leaf がない場合をあつかう。

<u>定理2</u>. $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ はともに固定点をもつとする。ある自然数 r があって、各固定点 p について $r \leq \max\{l ; j_p^l \varphi_\alpha = j_p^l \varphi_\beta\} < \infty$ とする。このとき、$H_2(\mathrm{Diff}_+^r(S^1))$ の元として $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$。

<u>証明の概略</u> $\mathrm{Fix}\,\varphi_\alpha = \mathrm{Fix}\,\varphi_\beta$ で, 固定点は有限個である。Moussu-Roussarie [8] により.(補題7に注意すると). $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ で

生成される$\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$の部分群は$\mathbb{Z}$又は$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$に同型なアルキメデス的順序群となる。$\mathbb{Z}$に同型の時は$(m,n)=1$となる整数$m,n$で$\varphi_\alpha^m\cdot\varphi_\beta^n=id$とするものがあり補題5により$\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}=0$である。$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$に同型の時は部分群による固定点以外の点のorbitはlocally denseになり、任意の実数sに対しφ_α^sが定義できる。このとき、φ_α, φ_βはあるC^∞ vector場ξのtime 1 map f_1, time t map f_tになっていることが次のようにして示される。Takens [13]により、φ_αは各固定点の近傍であるC^∞ vector場のtime one mapである。このとき、実数tがあって、各固定点の近傍でφ_βは、このvector場のtime t mapである。a,bを固定点とし、(a,b)に固定点はないとする。a,bの近傍で定義されたvector場をφ_α, φ_βにより$[a,b)$, $(a,b]$に拡張したものをξ_a, ξ_bとする。$c\in(a,b)$をとり$G_a(x)=\int_c^x\frac{dx}{\xi_a(x)}$, $G_b(x)=\int_c^x\frac{dx}{\xi_b(x)}$と定義すると、すべての実数$s$に対し、$G_a(\varphi_\alpha^s(c))-G_a(c)=s$ $G_b(\varphi_\alpha^s(c))-G_b(c)=s$. $G_a(c)=G_b(c)=0$ ゆえ、(a,b)で$G_a=G_b$. ゆえに(a,b)で$\xi_a=\xi_b$. こうしてφ_α, φ_βはC^∞-vector場ξのtime 1 map time t mapである。

補題4により、$t\geq 2$としてよい。補題8の仮定をみたす$g\in\mathrm{Diff}_+^r(S^1)$を構成する。前のような区間$(a,b)$, $c\in(a,b)$をとる。$[a,b]$においてgを$\eta(x)=\xi(x)\cdot\int_c^x\frac{dx}{\xi(x)}$というvector場のtime $\log k$ mapとすると任意の実数sに対し$gf_sg^{-1}=f_{ks}$

をみたす。$k+\frac{1}{k}=t$ とする。Takens[13] の normal form を用いて計算すると、$\eta(x)$ は $[a,b]$ で C^r-vector 場である。さらに、各区間で定義された g は、各固定点において、少なくとも r-jet まで一致し、$g\in \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ であることがわかる。こうして、補題8を使って 定理2を得る。

7. 次の定理は holonomy が $PGL(1)=SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ に属する時のものである。この定理が最初に示された。

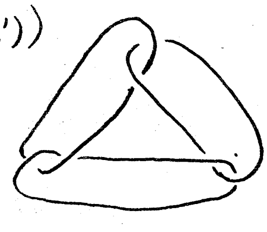
$PGL(1)=SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ の S^1 への作用を $S^1=\mathbb{R}P^1$ と考えた時の作用とする。$\varphi_\alpha,\varphi_\beta\in PGL(1)$, $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha$ のとき、$(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)$ を標準型になおすと、$(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)\sim\left(\begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c'&-s'\\s'&c'\end{pmatrix}\right)$ $(c^2+s^2=1,\ c'^2+s'^2=1,\ c,s,c',s'\in\mathbb{R})$, $(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)\sim\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\right)$ $(a\in\mathbb{R})$, 又は $(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)\sim\left(\begin{pmatrix}u&0\\0&\frac{1}{u}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v&0\\0&\frac{1}{v}\end{pmatrix}\right)$ $(u,v\in\mathbb{R}^+)$ となる。順に elliptic, parabolic, hyperbolic と呼ぶ。このとき、

定理3 i) $(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)$ が parabolic ならば $H_2(PGL(1))$ の元として $\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}=0$.

ii) $(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)$ によって定義される foliation は C^∞-foliation として cobordant to zero.

証明の概略 i) は $\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ という Lie 環の元で表わされる vector 場の time t map であることと、関係式 $\begin{pmatrix}x&0\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x^2t\\0&1\end{pmatrix}$ とにより補題8から得られる。

ii) elliptic ならば closed form で定義されるから $D^2\times S^1\times S^1$ の foliation に拡張される。($T^3=\partial(D^2\times S^1\times S^1)$)



hyperbolic なものは右の link の管状近傍の補集合をつかって、2つの elliptic なものの和と homologous であることが示される。(補題8の注意)

注意 elliptic hyperbolic な場合 $H_2(PGL(1))$ の元として 0 かどうかは未解決である。

8. Vector 場の time 1 map time t map で表わされる $H_2(\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}))$ の元については次の定理が得られる。S^1 のある区間で 0 であるような vector 場の time 1 map, time t map についても同様のことが成立する。

定理4 ξ を $\mathbb{R}$ 上の compact support C^r-vector field ($r=1,\cdots,\infty$) とする。これの time s map を f_s と書く。t を 2 次の無理数とするとき、$\{f_1, f_t\}$ は $H_2(\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}))$ の元として 0 である。

証明の概略 ξ は $[\frac{1}{2}, 1]$ の内部に support をもつとしてよい。$\mathbb{R}$ の compact support C^∞ vector 場 η で $\eta(x) = -\frac{1}{x^2}$ ($x\in[0,1]$) となるものを1つ固定する。$\eta(x)$ の time one map を g とする。$g^m([\frac{1}{2},1]) = [\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}]$ である。$|t|<1$ に対し、$\mathbb{R}$ 上の vector 場 ζ を次で定める。

$$\begin{cases} (-\infty, 0], [1,\infty) \text{ で } \zeta = 0 \\ [\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}] \text{ で } \zeta = g^m_*(t^m\xi) \quad m=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

ξ は compact support C^∞-vector 場になる。ξ の time s map を F_s とする。このとき $gF_1g^{-1} = F_{\frac{1}{t}} f_{-\frac{1}{t}}$, $g^{-1}F_1 g = F_t g^{-1} f g$ となる。

上の F を使って まず $t+\frac{1}{t}\in\mathbb{Q}$ のとき $\{f_1, f_t\}=0$ を示す。
$\{f_1, f_{t+\frac{1}{t}}\}=0$ ゆえ $|t|<1$ としてよい。補題1により

$\{F_1, g^{-1}F_1 g\} = \{gF_1g^{-1}, F_1\}$. ゆえに

$\{F_1, F_t g^{-1} f g\} - \{F_{\frac{1}{t}} f_{-\frac{1}{t}}, F_1\} = 0$. 補題2により

$\{F_1, F_t\} + \{F_1, g^{-1}fg\} - \{F_{\frac{1}{t}}, F_1\} - \{f_{-\frac{1}{t}}, f_1\} - \{f_{-\frac{1}{t}}, F_1 f_1^{-1}\} = 0$

補題3と注意により、$\{F_1, g^{-1}fg\}=0$, $\{f_{-\frac{1}{t}}, F_1f_1^{-1}\}=0$.
残った項をまとめて、$\{F_1, F_{t+\frac{1}{t}}\} = \{f_{-\frac{1}{t}}, f_1\}$. $t+\frac{1}{t}\in\mathbb{Q}$ のとき、補題5により、$\{F_1, F_{t+\frac{1}{t}}\}=0$。ゆえに

$\{f_1,f_t\} = \{f_1, f_{t+\frac{1}{t}}\} - \{f_1, f_{\frac{1}{t}}\} = -\{f_1, f_{\frac{1}{t}}\} = \{f_{\frac{1}{t}}, f_1\} = -\{f_{-\frac{1}{t}}, f_1\} = 0$.

t を一般の2次の無理数 $t=\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\sqrt{m}$ ($p_1,p_2,q_1,q_2,m\in\mathbb{Z}$, $m\geq 2$, $q_1\neq 0$ $q_2\neq 0$) とする。vector 場として $\frac{1}{2q_2}\xi$ をとり、$s+\frac{1}{s} = \frac{2(m+1)}{m-1}$ に対して上の結果を使うと $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{1}{2q_2}\left(\frac{m+1+2\sqrt{m}}{m-1}\right)}\}=0$ を得る。($s=\frac{m+1+2\sqrt{m}}{m-1}$) 補題5により $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{1}{2q_2}\frac{m+1}{m-1}}\}=0$ ゆえ、補題2により $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{\sqrt{m}}{q_2(m-1)}}\}=0$. 補題2により $2p_2q_2(m-1)$ 倍して $\{f_1, f_{\frac{p_2}{q_2}\sqrt{m}}\}=0$. 一方補題5により $\{f_1, f_{\frac{p_1}{q_1}}\}=0$ ゆえ、補題2により $\{f_1,f_t\} = \{f_1, f_{\frac{p_1}{q_1}}\} + \{f_1, f_{\frac{p_2}{q_2}\sqrt{m}}\}$ $=0$.

REFERENCES

1. K. Fukui: A remark on the foliated cobordisms of codimension-one foliated 3-manifolds, J. Math. Kyoto Univ. 18-1 (1978) 189-197.

2. M. R. Herman: The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3, Geometry and Topology, Rio de Janeiro, Springer Lecture Note 597 (1976) 294-307.

3. N. Kopell: Commuting difeomorphisms, Global Analysis, Symp. Pure Math. vol. XIV, A. M. S. (1970) 165-184.

4. J. N. Mather: Integrability in codimension 1, Comm. Math. Helv. 48 (1973) 195-233.

5 J. N. Mather: Commutators of Diffeomorphisms, Comm. Math. Helv. 49 (1974) 512-528.

6. T. Mizutani: Foliated cobordisms of S^3 and examples of foliated 4-manifolds, Topology vol. 13 (1974) 353-362.

7. S. Morita and T. Tsuboi: The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, to appear.

8 R Moussu et R Roussarie: Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages, I. H. E. S. Publ. Math. 43 (1974) 143-168.

9. T. Nishimori: Compact leaves with abelian holonomy, Tohoku Math. J. 27 (1975) 259-272.

10. T. Nishimori: S R H-decompositions of codimension-one foliations and the Godbillon-Vey class, to appear.

11. G. Oshikiri: The surgery of codimension-one foliations, to appear.

12. F. Sergeraert: Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité, Inventiones math. 39 (1977) 253-275.

13. F. Takens: Normal forms for certain singularities of vector-fields, Ann. Inst. Fourier 23,2 (1973) 163-195.

14. W. Thurston: Non-cobordant foliations of S^3, Bull. A. M. S. 78 (1972) 511-514.

15. W Thurston: Existence of codimension-one foliations, Ann. of Math. 104 (1976) 249-268.

16. J. Wood: Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv. 46 (1971) 257-273.