

## Edrei の問題と関連する諸問題

東工大理 小沢 満

Hayman の問題集 [4] にある Edrei による問題 2.25 はつぎのように述べる:  $f, g$  は位数  $\rho (< \infty)$  の一次独立な整函数とする. Wronskian  $fg' - f'g$  の位数が  $\rho$  より小であれば,  $\rho$  は半整数  $n/2$  ( $n \geq 2$ )?

$f = \exp z^\rho, g = \exp(-z^\rho)$  が  $\rho$  が整数である例である.

$w'' - z^n w = 0$  の独立な解が半整数の例を与える.

函数論特に値分布論で半整数が関係する問題は数多く存在する. しかも解けているものは極めて少ない. この半整数の壁を打破する有効な手段を求めるとは最も重要な課題である. 本報告では Edrei の問題に対する一つの方法, および F. Nevanlinna の問題との関係について述べる. さらに常微分方程式論での一つの問題についてのいくつかの結果について述べる.

### § 1. 準備.

$f(z) = \sum a_n z^n$  は整函数とする.  $|z| = r$  を固定すると  
 $|a_n| r^n \geq |a_j| r^j$  がすべての  $j$  についてなりたつ  $n$  がある.  
 このような  $n$  の最大を central index といい,  $n(r)$  と表わす.  
 $\mu(r) = |a_{n(r)}| r^{n(r)}$ ,  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  とおく. この  
 とき

1).  $n(r)$  は単調増加で  $f$  が超越的ならば  $n(r) \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r) \left\{ 1 + 2n \left( r + \frac{r}{n(r)} \right) \right\},$$

$$\log \mu(r) = \log \mu(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt,$$

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r) \left\{ \log \mu(r) \right\}^{\frac{1}{2} + \delta}, \quad \delta > 0$$

よって

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

2).  $|f(z)| = M(r)$ ,  $|z| = r$  である  $z$  に対して

$$f^{(p)}(z) = \left( \frac{n(r)}{z} \right)^p f(z) (1 + \varepsilon_p),$$

$$\varepsilon_p = \frac{h_p(z)}{n(r)^p}, \quad |h_p(z)| < K, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

が対数測度  $< \infty$  な集合  $\Delta$  以外の  $z$  で  $r \rightarrow \infty$  とするときなり  
 たつ.

これらの結果については [5] 参照. Wiman-Valiron の方  
 法といわれている. 整函数論への応用の外に線形常微分方程  
 式への有効な応用が著しい.

3). Besicovitch の定理 [1].

$$X = \left\{ r \mid m(r) > M(r)^{\cos \pi \rho'} \right\} \text{ の upper density} \\ \geq 1 - \frac{\rho}{\rho'}.$$

ここで  $\rho$  は整函数  $f$  の位数,  $\rho < \rho' < 1/2$ ,  $m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|$ .

4). Hille [6]. 定理 4.5.1.

$f(z)$  は有限位数  $\rho$  の有理型函数とする. このとき

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq 18 |z|^\gamma, \quad \gamma > 1 + 3\rho$$

が長さ有限な区間列以外の  $|z|$  に対して成り立つ.

5). Tsuji [8]. 定理 III. 68.

$D$  は無限領域.  $f(z)$  は  $\bar{D}$  で正則,  $\partial D$  上で  $|f(z)| \leq 1$ .

$$M(r, D) = \max_{z \in D, |z|=r} |f(z)|. \quad D \text{ 中 } |f(z_0)| > 1 \text{ なる点 } z_0 \text{ があ}$$

れば,

$$\log \log M(r, D) \geq \pi \int_1^{kr} \frac{dr}{r \theta(r)} - \text{const.} \quad (0 < k < 1)$$

ここで  $\pi \theta(r)$  は  $D \cap \{|z|=r\}$  の長さである.

§ 2. Edrei の問題.

条件を量的にして  $m(r, fg' - f'g) = o(m(r, f))$  とする.

$$P = fg' - g f', \quad P' = f g'' - g f'', \quad Q = f g''' - g f''',$$

$$R = P'' - Q$$

とおく. このとき

$$P'' = Q + f'g'' - g'f'' = Q - P f''/f + P' f'/f.$$

4

により微分方程式

$$P f'' - P' f' + R f = 0$$

が得られる.

6).  $P$  が多項式の場合.

$$\begin{aligned} m(r, R) &\leq m(r, P) + m(r, P') + m(r, \frac{f''}{f}) + m(r, \frac{f'}{f}) \\ &= O(\log r) \end{aligned}$$

よって  $R$  も多項式となる. 2) 1) によって  $|z| = r, \notin \Delta$  に対して

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1 + \varepsilon'') - \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} \frac{n(r)}{\zeta} (1 + \varepsilon') + \frac{R(\zeta)}{P(\zeta)} = 0,$$

$$|f(\zeta)| = \max_{|z|=|\zeta|} |f(z)|.$$

$$P = a_p z^p + \dots, \quad Q = b_q z^q + \dots \quad \text{と おく と}$$

$$\begin{aligned} n(r)^2 (1 + \varepsilon'') - p n(r) (1 + \varepsilon_1) \\ + \left( p(p-1) - \frac{b_q}{a_p} \zeta^{q-p+2} \right) (1 + \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

$n(r) \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow \infty$ ) より  $q - p + 2 \geq 1$ . よって

$$n(r) \sim c |z|^{1 + (q-p)/2} \quad |z| \notin \Delta, \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

一方  $f$  の位数は対数測度有限な集合の除外に影響されなから、1) によって  $f$  の位数  $= 1 + \frac{q-p}{2}$  である.

この場合  $f$  の位数  $= 1/2$  となることはない. 何故ならば、 $f$  の位数  $= 1/2$  とすると  $q = p-1$  である. よって  $R = f'g'' - g'f''$  の次数  $q = p-1$ .  $f', g'$  の Wronskian  $R$  が多項式であるから

$$R f''' - R' f'' + R_1 f' = 0$$

がなりたつ。ここで  $R_1$  の次数 =  $p-2$ 。以下 = の操作を繰り返すと

$$R_{p-2} f^{(p+1)} - R'_{p-2} f^{(p)} + R_{p-1} f^{(p-1)} = 0$$

がえられ、 $R_{p-1}$  の次数 = 0 となる。

$R_{p-1} \equiv 0$  のとき  $f^{(p)} = C R_{p-2}$  となり、 $f$  は多項式になるから除外してよい。 $R_{p-1} \neq 0$  かつ定数のとき、もう一回上のことを行なうと

$$R_{p-1} f^{(p+2)} + R_p f^{(p)} = 0.$$

$R_p$  は多項式でその次数 = -1。これは矛盾である。

7).  $P = p e^L$ ,  $p, L$ : 多項式 の場合.

$$m(n, R e^{-L}) \leq m(n, \frac{R}{p}) + m(n, p) = O(\log n)$$

により、 $R e^{-L} = \Delta$  は多項式。よって  $R = \Delta e^L$ 。方程式に代入し  $e^L$  を除けば

$$p f'' - (p' + p L') f' + \Delta f = 0$$

となるから (6) の場合になる。

$R$  が多項式のときには  $R f''' - R' f'' + S f' = 0$  となる。

よってこのときにも (6) の場合になる。 $R = r e^L$ ,  $r, L$  多項式の場合も同様である。

以上の結果は明らかに最終的なものではない。 $R$  と  $P$  との間にはある種の関係がある。それは

$R^2 - RP'' + P'R'$  は  $P$  の倍数

である。つぎに微分方程式を  $f = w P^{1/2}$  によって

$$w'' + q_0 w = 0, \quad q_0 = \frac{R}{P} - \frac{3}{4} \frac{P'^2}{P^2} + \frac{1}{2} \frac{P''}{P}$$

と変換しておく。  $w$  は一般に 2 価代数型となる。

### §3. F. Nevanlinna の問題との関係。

F. Nevanlinna の問題は

$$\sum \delta(a, f) = 2 \text{ ならば, } f \text{ の位数は半整数 } m/2?$$

この問題については Weitsman によって  $m \geq 2$  が示されている。  $f$  の位数が有限である場合だけが問題である。

Schwarzian  $\{f, z\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2$  によってつぎのことは知られている。  $f' = 0$  または  $\infty$  である点では  $\{f, z\}$  は二重極であり、その他の点では正則である。

$$\sum \delta(a, f) = 2 \text{ ならば, } \delta(0, f') = 1, \quad N(r, 0, f') = o(T(r, f)).$$

$$\text{さらには } 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f') = o(T(r, f)). \text{ よって}$$

$$\{f, z\} = A$$

とおくと、  $A$  は二重極のみをもつ有理型関数であり、二重極の個数  $\text{個数} = o(T(r, f))$  をみたらす。

特に  $f$  が重複値 (有限または  $\infty$ ) を持たないならば、  $A$  は整関数となる。 Schwarzian の式よりこのときには  $A$  は多項式となる。 F. Nevanlinna はこの場合に問題を解いた。 F. Nevanlinna の方法は問題を  $w'' + q_0(z)w = 0$ ,  $\{f, z\} = 2q_0(z)$

を解くことに帰着させ、ついで Hille による漸近解を求める方法を応用した。しかし  $g(z)$  が二重極を無限個もつ場合には Hille の方法は適用出来ない。Edrei の問題も二重極を無限個もつ場合になつていて、この意味で同一の困難に出会つてゐることはなる。ところがもっと密接に關係してゐることを示される。Edrei の問題を変換する。

$$F = g/f$$

$$\text{とおくとき、 } F' = (g'f - gf')/f^2. \quad \text{すなはち } m(r, g'f - gf')$$

$$= o(m(r, f)) \quad \text{により}$$

$$N(r, 0, F') = o(m(r, f)),$$

$$\begin{aligned} m(r, 1/F') &\leq 2m(r, f) + m(r, 1/(g'f - f'g)) \\ &= 2(1+o(1))m(r, f). \end{aligned}$$

よつて

$$T(r, F') \leq 2(1+o(1))m(r, f).$$

$$\text{一方} \quad 2m(r, f) \leq m(r, 1/F') + m(r, g'f - f'g) \quad \text{より}$$

$$2(1+o(1))m(r, f) \leq T(r, F')$$

よつて

$$T(r, F') = 2(1+o(1))m(r, f).$$

これより

$$N(r, 0, F') = o(T(r, F'))$$

さらに  $f, g$  の共通零点の個数函数  $= o(m(r, f))$  としてよい

から

$$2N(n, \infty, F) - N(n, \infty, F') = o(T(n, F)).$$

よって  $\{F, z\} = A$  とおくと,  $A$  は二重極のみをもつ有理型函数であり, 二重極の個数函数  $= o(T(n, F))$  である. これはまさしく F. Nevanlinna の問題が最初に出会った問題である.

#### §4. 微分方程式論での一つの問題.

$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$ ,  $P$ : 超越整函数,  $Q$ : 多項式 を考える. まず容易にわかることは一般解の位数が  $\infty$  であることである. ところが特殊解が有限位数を持つことはありうる. 例:  $w'' + e^z w' - w = 0$  の解  $w = e^{-z} - 1$ .

問題. 如何なる  $P, Q$  の対に対して特殊解の位数有限となるか? このとき特殊解の位数は整数であるか? さらに  $P$  の位数は整数であるか?

このような基本的な問題が残っているのが奇妙でもある. が係数が超越的な場合にははやむを得ないようである.

8)  $P(z)$  の位数  $< 1/2$  ならば, 解はすべて位数  $\infty$  である.

証明. Wiman-Valiron の方法による.  $|s| = r \notin \Delta$ ,  $|w(s)| = \max_{|z|=r} |w(z)|$ ,

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1 + \varepsilon'') + P(s) \frac{n(r)}{r} (1 + \varepsilon') + Q(s) = 0.$$

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |P(z)|, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)| \quad \text{と おく と}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1 + \varepsilon''') &\geq |P(z)| \frac{n(r)}{r} (1 - \varepsilon') - |Q(z)| \\ &\geq m(r) \frac{n(r)}{r} (1 - \varepsilon') - A r^k. \end{aligned}$$

Besicovitch の定理によリ,  $P$  の位数  $\rho < 1/2$ ,  $\rho < \rho' < 1/2$  とし

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1 + \varepsilon''') \geq M(r)^{\cos \pi \rho'} \frac{n(r)}{r} (1 - \varepsilon') - A r^k$$

が  $r \in X \cap \Delta^c$  で成り立つ.  $\therefore X$  の upper density  $\geq 1 - \rho/\rho'$ .

故に  $r \in X \cap \Delta^c$  で  $\forall S'$  に対し

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1 + \varepsilon''') \geq r^{S' \cos \pi \rho'} \frac{n(r)}{r} (1 - \varepsilon') - A r^k.$$

よって,  $n(r) \geq r^{S'}$ ,  $\forall S'$ .  $\therefore$  尤も

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \geq S'.$$

$S'$  は任意によつて, 解の位数  $= \infty$ .

9).  $w'' + e^z w' + Q w = 0$ ,  $Q$ : 多項式 が有限位数の整  
函数解をもつとする.  $\therefore$  のとき

(i)  $w'(z)$  は  $D: -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) で一様有界.

(ii)  $w'(z) \rightarrow 0$ ,  $w'' \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in D$ ).

(iii)  $w(z) \rightarrow w(0) + a_0$  ( $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in D$ )

$$a_0 = \int_0^\infty w'(t) dt \quad t: \text{実正数.}$$

$$(iv) \quad w(0) + a_0 \neq 0.$$

証明. (i). 4) によつて  $r=|z| \notin \Delta$  のとき ( $z \in D$ )

$$|e^z| |w'(z)| \leq 18 |z|^\gamma |w'(z)| + |Q(z)| |w(z)|.$$

$$|w(z)| - |w(0)| \leq \int_0^r |w'(t)| dt \leq r M_1(r, \theta),$$

$$M_1(r, \theta) = \max_{0 \leq |t| \leq r} |w'(t|e^{i\theta})|.$$

よつて,  $|z| \notin \Delta$  に対して

$$(e^{r \cos \theta} - 18 r^\gamma) |w'(z)| \leq (r M_1(r, \theta) + |w(0)|) |Q(z)|.$$

$M_1(r, \theta)$  は  $r$  の単調増加な連続函数であることより,  $M_1(r, \theta)$

が  $r \rightarrow \infty$  のとき非有界ならば,  $\exists r_m = |z_m| \notin \Delta, z_m \in D,$

$$|w'(z_m)| = M_1(r_m, \theta), \quad z_m = r_m e^{i\theta}, \quad \text{これより}$$

$$(e^{r_m \cos \theta} - 18 r_m^\gamma - r_m |Q(z_m)|) |w'(z_m)| \leq |w(0)| |Q(z_m)|.$$

よつて  $w'(z_m) \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ). これは矛盾. よつて  $M_1(r, \theta)$  は有界である.  $M_1(r, \theta)$  は  $\theta$  によつても連続であるから  $M_1(r, \theta)$  は一様有界 ( $r e^{i\theta} \in D$ ). よつて  $|w'(z)|$  は  $z \in D$  ならば一様有界である.

(ii). (i) によつて  $|w'(z)| \leq K$  ( $z \in D$ ). さらに

$$|w''(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|w'(z + \rho e^{i\varphi})|}{\rho^2} \rho d\varphi \leq \frac{K}{\rho}.$$

$$|w(z)| \leq |w(0)| + r K$$

によつて

$$e^{\pi \cos \varepsilon} |w'(z)| \leq |Q(z)| (\pi K + |w(0)|) + \frac{K}{\Delta}.$$

これより

$$w'(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty, z \in D).$$

さらに

$$|w''(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\Delta} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |w'(z + \Delta e^{i\theta})| \cdot 2\pi$$

$$\text{よって, } w''(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty, z \in D).$$

$$(iii). \quad Q(z) = A_0 + \dots + A_n z^n \text{ とし, } \hat{Q}(z) = |A_0| + \dots + |A_n| z^n \text{ とお$$

$$\text{く. } \varepsilon \text{ のとき } \Delta e^{i\varphi} \in D_\varepsilon = \left\{ z \mid 0 \leq |z| < \infty, -\frac{\pi}{2} + 2\varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon \right\}$$

$$|w'(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{|w''(\Delta e^{i\varphi})| + \hat{Q}(\Delta) |w(\Delta e^{i\varphi})|}{e^{\Delta \cos \varphi}}.$$

$$(ii) \text{ より } |w''(\Delta e^{i\varphi})| \leq K, |w(\Delta e^{i\varphi})| \leq K(\Delta + 1) \text{ としよ$$

い. よって

$$|w'(\Delta e^{i\varphi})| \leq K \frac{\hat{Q}(\Delta)(\Delta + 1) + 1}{e^{\Delta \cos \varphi}}.$$

これより

$$a_0 = \int_0^\infty w'(t) dt, \quad t: \text{実正数}$$

は存在する. さらに

$$\int_0^\infty w'(te^{i\theta}) e^{i\theta} dt, \quad \left(-\frac{\pi}{2} + 2\varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right)$$

も存在する. したがって  $a_0$  は等しい.  $z = \tau \Delta e^{i\varphi} \in D_\varepsilon$  とし

$$|w(z) - w(0) - a_0|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{\Delta e^{i\varphi}} w'(u) du - \int_0^{\infty} w'(t) dt \right| \\
&= \left| - \int_{\Delta}^{\infty} w'(t) dt + \int_{\Delta}^{\Delta e^{i\varphi}} w'(u) du \right| \\
&\leq \left| \int_{\Delta}^{\infty} w'(t) dt \right| + \int_0^{\varphi} |w'(\Delta e^{i\eta})| \Delta d\eta \\
&\rightarrow 0 \quad (\Delta \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

よって

$$\exists \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D_{\varepsilon}}} w(z) = w(0) + a_0.$$

(iv).  $w(0) + a_0 = 0$  とする.  $\Delta e^{i\varphi} \in D_{\varepsilon}$  とするとき

$$\begin{aligned}
|w(\Delta e^{i\varphi})| &= |w(\Delta e^{i\varphi}) - w(0) - a_0| = \left| \int_{\Delta}^{\infty} w'(te^{i\varphi}) dt e^{i\varphi} \right| \\
&\leq \int_{\Delta}^{\infty} \frac{K \{ \hat{Q}(t)(t+1) + 1 \}}{e^{t \cos \varphi}} dt \\
&\leq K \frac{\hat{Q}(\Delta)(\Delta+1) + 1}{e^{\frac{\Delta}{2} \cos \varphi}} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dt}{e^{-\frac{t}{2} \cos \varphi}} \\
&= K \frac{2}{\cos \varphi} \frac{\hat{Q}(\Delta)(\Delta+1) + 1}{e^{\Delta \cos \varphi}} < \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

上の評価では  $\Delta$  を十分大に取れば可能である. さらに

$$|w''(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{t} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |w'(\Delta e^{i\varphi} + t e^{i\theta})|.$$

そこで  $t = 1/\Delta$  とすると

$$|w''(\Delta e^{i\varphi})| \leq \Delta \max_{\theta} \frac{K \{ \hat{Q}(\Delta + \frac{1}{\Delta})(\Delta + \frac{1}{\Delta} + 1) + 1 \}}{e^{\Delta \cos \varphi + t \cos \theta}}$$

$$\leq \Delta K \frac{\hat{Q}(\Delta + \frac{1}{\Delta})(\Delta + \frac{1}{\Delta} + 1) + 1}{e^{\Delta \cos \varphi} - \frac{1}{\Delta}} \leq \frac{\Delta}{100}.$$

このとき与えられた微分方程式により

$$e^{\Delta \cos \varphi} |w'(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{\hat{Q}(\Delta)}{100} + \frac{\Delta}{100}.$$

故に

$$|w'(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{100} \frac{\hat{Q}(\Delta) + \Delta}{e^{\Delta \cos \varphi}} \leq \frac{1}{100^2}.$$

この評価より再び

$$|w(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{100} \frac{2}{\cos \varphi} \frac{\hat{Q}(\Delta) + \Delta}{e^{\Delta \cos \varphi}} \leq \frac{1}{100^2}$$

$$\begin{aligned} |w''(\Delta e^{i\varphi})| &\leq \Delta \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |w'(\Delta e^{i\varphi} + \frac{1}{\Delta} e^{i\theta})| \\ &\leq \Delta \frac{1}{100} \frac{\hat{Q}(\Delta + \frac{1}{\Delta}) + \Delta + \frac{1}{\Delta}}{e^{\Delta \cos \varphi} - \frac{1}{\Delta}} \leq \frac{\Delta}{100^2} \end{aligned}$$

これより

$$|w'(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{e^{\Delta \cos \varphi}} \frac{1}{100^2} (\hat{Q}(\Delta) + \Delta) \leq \frac{1}{100^3}.$$

以下この操作を繰返すと

$$|w(\Delta e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{100^p}.$$

$p \rightarrow \infty$  とし  $\forall \Delta \geq \Delta_0$  に対し

$$w(\Delta e^{i\varphi}) \equiv 0.$$

これは矛盾である。

注意. 9)では特に簡単な場合について述べたが, 9)全体は

より一般的な場合にも成り立つ。  $w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$  で  $P(z)$  がある角領域  $A$  で超絶的  $= \infty$  に発散する場合にも証明出来る。 ●

10)  $w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$  で  $P(z)$  は有限個の放射線  $l_1, \dots, l_p$  以外の放射線に沿って  $z \rightarrow \infty$  とすると超絶的  $= \infty$  に発散するとする。さらに  $l_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) に沿っては  $P(z)$  が有界ならば、すべての解は位数  $\infty$  である。

証明)  $l_1, \dots, l_p$  を含む任意に小さな角領域のすべてにおいて  $w'(z)$  が有界であれば、 $w'(z)$  が全有限平面で有界となるから矛盾。よって  $l_1$  を含む任意に小さな角領域  $A_\varepsilon$  で  $w'(z)$  は非有界としてよい。  $A_\varepsilon$  の両隣りにおいて  $|w'(z)| \leq K$  としてよい。  $\therefore$   $|w'(z)|/K \geq 2$  である領域で無限であるものを考える。これを  $D$  とする。  $\therefore$   $\therefore$  5) を適用する。  
このとき  $\theta(r) \leq 2\varepsilon$  により

$$\begin{aligned} \log \log M(r, D) &\geq \pi \frac{1}{2\varepsilon} \int_1^{Kr} \frac{dr}{r} - \text{const} \\ &= \frac{\pi}{2\varepsilon} \log Kr - C. \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, D)}{\log r} = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

$\varepsilon$  は任意であるから、 $w'$  の位数  $= \infty$ 。これは矛盾。

例.  $w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$  で

$$\textcircled{1} \quad P(z) = \sum_{n=-N}^M a_n e^{nz}, \quad a_M \neq 0, \quad a_{-N} \neq 0, \quad M, N > 0.$$

$$\textcircled{2} \quad P(z) = a(z)z^{-n} \sin z^n, \quad a: \text{多項式}.$$

$$\textcircled{3} \quad P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^2}\right).$$

11) Frelé の定理 [2] の別証.

$w'' + e^z w' + c w = 0$  ( $c$ : 定数) が有限位数な解を持つならば,  $c = -n^2$ .

以下の証明は T. Kobayashi による.

$w_1(z), w_2(z)$  は上の方程式の独立な解で  $w_1(z)$  の位数有限とする.  $w_2(z)$  は当然位数  $\infty$  である.  $w_1(z+2\pi i)$  もまた解であり, 有限位数をもつから

$$w_1(z+2\pi i) = c_1 w_1(z).$$

と  $z$  が右半平面で  $z \rightarrow \infty$  とすると 9) によつて  $w_1(z) \rightarrow A \neq 0$ ,  $w_1(z+2\pi i) \rightarrow A \neq 0$ . よつて  $c_1 = 1$ . ゆえに

$$w_1(z+2\pi i) = w_1(z).$$

以上によつて  $0 < |x| < \infty$  で一価正則な函数  $f(x)$  により

$$w_1(z) = f(e^{-z}).$$

と  $z$  が  $w_1(z) \rightarrow A \neq 0$  ( $z \rightarrow \infty, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ) により

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \text{となる.} \quad a_0 = A \quad \text{である.}$$

これを微分方程式に代入すると

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right)'' + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right)' e^z + c \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right) = 0.$$

これより

$$(n^2 + c)a_n = (n+1)a_{n+1} \quad (n \geq 1), \quad a_1 = ca_0.$$

ここで  $c \neq -n^2$  がすべての正整数  $n$  に対して成り立つとすると,

$$|a_n|/|a_{n+1}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

これは  $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$  の収束半径  $= 0$  となり, 矛盾. 以上より  $c = -n^2$  となる正整数  $n$  がある. このとき  $a_{n+j} = 0$   $\forall j \geq 1$  となり,  $f(x) = \sum_0^n a_j x^j$ .  $a_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ) は簡単な計算で求まる.

### 文献

- [1] Besicovitch, A. S. On integral functions of order  $< 1$ .  
Math. Ann. 27 (1927), 677-695.
- [2] Frei, M. Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung  $w'' + e^{-z}w' + \text{konst.}w = 0$ . Comm. Math. Helv. 36 (1961), 1-8.
- [3] Fuchs, W. H. J. Topics in Nevanlinna theory. Proc. N R L Conf. Classical Function Theory. Naval Research Laboratory (1970), 1-32.

- [4] Hayman, W. K. *Research problems in function theory*. Athlone Press. London (1967).
- [5] Hayman, W. K. *The local growth of power series: A survey of the Wiman-Valiron method*. *Canad. Math. Bull.* 17 (1974), 317-358.
- [6] Hille, E. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Wiley & Sons. New York (1976).
- [7] Nevanlinna, F. *Über eine Klasse meromorpher Funktionen*. 7 Congress Math. Scand. Oslo (1929).
- [8] Tsuji, M. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen. Tokyo (1959).
- [9] Valiron, G. *Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles*. *Bull. Soc. Math. France* 51 (1923), 33-45.
- [10] Wittich, H. *Subnormale Lösungen der Differentialgleichung  $w'' + p(e^z)w' + q(e^z)w = 0$* . *Nagoya Math. J.* 30 (1967), 29-37.