数理解析研究所講究録
第 349 巻 1979 年 8-31

8

多重ソリトン解の直接的構成法と、時空二次元の古典場のモデルの場の方程式の準周期解の構成について

阪大 理　伊達悦朗

このノートでは、散乱の逆問題の方法 (Inverse Scattering Method) で解ける非線型方程式の多重ソリトン解を求める一つの直接的な方法と、時空二次元の古典場のモデルの場の方程式の準周期解の構成について述べる。

初めに、この二つの話題の背景について述べる。

散乱の逆問題の方法で解ける非線型方程式の一つの典型的なクラスは、いわゆる Zakharov−Shabat 方程式 [18]，つまり、二つの線型微分作用素　$L=\sum_{j=0}^{m} u_j(x,y,t)\frac{d^j}{dx^j}$，$M=\sum_{j=0}^{n} v_j(x,y,t)\frac{\partial^j}{\partial x^j}$

u_j, v_k : $l\times l$ 行列　を用いて、

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}-L, \frac{\partial}{\partial t}-M\right]=0$$

の形に表わされる u_j, v_k に関する非線型方程式である。例えば、Korteweg−de Vries (KdV) 方程式，Boussinesq 方程式，二次元 KdV (Kadomtsev−Petviashvili) 方程式等がこのクラスに含まれる。

Kricheber [6.7.8] は、Riemann面の理論を用いて Zakharov-Shabat 方程式の準周期解を構成した。その方法の概略は次のとおりである。まず、Riemann面上の与えられた l 個（行列の size に対応）の点で与えられた形の essential singularity（作用素 L, M の order に対応）を持つ関数を abel 積分の理論を用いて構成する。次に、その関数がみたす二つの線型微分方程式

を決定する。これにより Zakharov-Shabat 方程式の準周期解が得られ、同時にその解の theta 関数による表示が得られる。

一方で Novikov [14] による KdV 方程式の周期解に関する結果から、多重ソリトン解は、(準) 周期解の、対応する Riemann 面の退化に伴う、極限と考えられ、実際に KdV 方程式の場合には、そのような計算も行なわれている。従って、特異点（二重点）を持った有理曲線上で、Kricheber の方法にならった構成を行なえば、多重ソリトン解の簡単な直接的構成ができると期待される。その方向での結果としては、Kricheber [8] による、定常的な Zakharov-Shabat 方程式の場合の "準周期解を背景とした多重ソリトン解"（$|x| \to \infty$ のとき準周期解となるような解）の代数幾何学的な構成、及び、Manin [12] による、二重点を持った有理曲線上のある種の vector bundle（そのみたすべき性質は、Kricheber の構成を代数幾何学的に公理化したもので、その方向での最初の研究が Drinfeld [3] によりなされたことがら。Manin は Kricheber-Drinfeld bimodule と呼んでいる）の構成がある。

Manin の構成は、Zakharov－Shabat 方程式の多重ソリトン解の構成に対応するものではあるが、そこで構成されているものが、既に散乱の逆問題の方法で構成されている多重ソリトン解と同一のものであることをみるには、その構成をより具体化する必要がある。この具体化がこのノートの目的の一つである。

Kricheber－Manin の構成をより具体的に行なうもう一つの目的は、一応は散乱の逆問題の枠組に入ってはいるものの、（つまり、二つの線型作用素の commutativity として書かれてはいるものの、その係数にパラメーター λ の有理関数が含まれていたりするために）散乱理論を構成することが複雑となってきている方程式の多重ソリトン解を求める簡単な方法への足がかりとしてである。これらの方程式としては、例えば、Pohlmeyer, Lund－Regge のモデルの方程式、massive Thirring model の方程式等がある。

このノートの前半では、Zakharov－Shabat 方程式の多重ソリトン解を Kricheber の方法に対応する形で初等的に構成し、

更に、Zakharov−Shabat 方程式の枠組には入らないと考えられる sine−Gordon 方程式及び、多重ソリトン解を持つ非線型微分差分方程式の典型である戸田格子の方程式に対しても同様の方法で多重ソリトン解を構成する。そして得られた解が、散乱の逆問題の方法で得られている解と同一であることを示す。

続いて、後半で対象とする方程式は、$A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$ を $N\times N$ 行列とするとき、

$$\left[i\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A}{\lambda+1},\ i\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{B}{\lambda-1} \right] = 0$$

の形に表わされるクラスである。このクラスは、Zakharov−Mikhailov [17] により、提起されたもので、$iA, iB \in su(2)$ 又は $so(2,\mathbb{R})$ と制限を課すことにより、Pohlmeyer Lund−Regge のモデルの方程式、又は sine−Gordon 方程式が得られる。

Zakharov と Mikhailov は N-ソリトン解が与えられた時に、$(N+1)$−ソリトン解を構成する方法を与えている。

ここでは、A, B に制限を課さない場合の、上の方程式の準周期解を構成する。構成は Kricheber [7,8] の方法と類似の方法でできる。A, B に制限を課した場合には、ここで述べる方法を、更に精密化する必要があるようである。

I. 多重ソリトン解の直接的構成法

1. 同時解の構成

Zakharov−Shabat 方程式、sine−Gordon 方程式、戸田格子の方程式のいずれも、二つの線型作用素が可換という形で表わされる。

i) Zakharov−Shabat 方程式 [18]（簡単の為にスカラー作用素の場合を扱かう．$\ell=1$）．

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}-L,\ \frac{\partial}{\partial t}-M\right]=0$$

$$L=\sum_{j=0}^{m}u_j(x.y.t)\frac{\partial^j}{\partial x^j},\quad M=\sum_{j=0}^{n}v_j(x.y.t)\frac{\partial^j}{\partial x^j}\qquad u_m.u_{m-1},v_n.v_{n-1}:\text{定数}$$

ii) sine−Gordon 方程式 [1]，[16]

$$u_{\xi\eta}+\sin u=0$$

この方程式は次の二つの線型偏分方程式の compatibility condition である．

$$L\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{i\lambda}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Phi-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}u_\xi&0\\0&-u_\xi\end{bmatrix}\Phi=0$$

$$\lambda\in\mathbb{C}$$

$$M\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}-\frac{i}{2\lambda}\begin{bmatrix}0&\exp(iu)\\\exp(-iu)&0\end{bmatrix}\Phi=0$$

iii) 戸田格子の方程式 [4]，[11]

$$\partial Q_n/\partial t=P_n,\quad \partial P_n/\partial t=\exp(Q_{n-1}-Q_n)-\exp(Q_n-Q_{n+1})\quad n\in\mathbb{Z}$$

あるいは

$$a_n=\frac{1}{4}\exp\{(Q_{n-1}-Q_n)/4\},\quad b_n=-\frac{1}{2}P_{n-1}$$

とおくことにより

$$\partial a_n/\partial t = 2a_n(b_{n+1} - b_n), \quad \partial b_n/\partial t = 2a_n(a_n - a_{n-1}).$$

この方程式は，次の二つの線型微分差分方程式の compatibility condition である。

$$L\Phi = (\lambda+\lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial\Phi/\partial t \qquad \Phi = \{\Phi(n)\}$$

$$(L\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) + a_{n-1}\Phi(n-1)$$

$$(M\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) - a_{n-1}\Phi(n-1).$$

これら二つの線型方程式の同時解となるべき関数を複素パラメーター λ の関数としての簡単な特徴付けにより構成する。

N を任意の自然数，$\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$ を互いに相異なる複素数，$c_1, \dots, c_N$ を任意の複素数とする。それぞれの方程式に応じて，次の形の関数を考える。

(a.1) $\Phi(x,y,t,\lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x,y,t)\lambda^j)\exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$

ここで λ はパラメーター，$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} p_j\lambda^j$，$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} q_j\lambda^j$ は任意の定数係数の多項式.

(a.2) $\Phi_n(\xi,\eta,\lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{nj}(\xi,\eta)\lambda^j)\exp(\lambda\xi + \lambda^{-1}\eta) \qquad n = 1, 2$

(a.3) $\Phi_n(t,\lambda) = \lambda^n(\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{nj}(t)\lambda^j)\exp\{t(\lambda - \lambda^{-1})\} \qquad n \in \mathbb{Z}$

この形の関数に対して，次の条件を課す。この条件が，Zakharov-Shabat 方程式の場合，二重点を持つ有理曲線上での

構成に対応している。

(b.1) $\Phi(x,y,t,\alpha_j) = c_j\,\Phi(x,y,t,\beta_j)$ $\quad 1 \le j \le N$

(b.2) $\Phi_n(\xi,\eta,\alpha_j) = (-1)^{n-1} c_j\,\Phi_n(\xi,\eta,\beta_j)$ $\quad \beta_j = -\alpha_j,\ 1 \le j \le N,\ n=1,2$

(b.3) $\Phi_n(t,\alpha_j) = c_j\,\Phi_n(t,\beta_j)$ $\quad \beta_j = \alpha_j^{-1},\ 1 \le j \le N,\quad n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1. 条件(b.1)(resp. (b.2),(b.3))により関数 $\Phi(x,y,t,\lambda)$ (resp. $\Phi_n(\xi,\eta,\lambda)$, $\Phi_n(t,\lambda)$) は一意的に決定される.

証明. いずれの場合も同様であるので. Zakharov−Shabat方程式の場合について示す。

条件(b.1)は未知数 $\phi_j(x,y,t)$ $0 \le j \le N-1$ に対する次の連立一次方程式と同値である。

$$(*)\quad \sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha_j^k e(\alpha_j) - c_j \beta_j^k e(\beta_j)\right) \phi_k = -\alpha_j^N e(\alpha_j) + c_j \beta_j^N e(\beta_j) \qquad 1 \le j \le N$$

$$e(\lambda) = \exp(\lambda x + P(\lambda) y + Q(\lambda) t)$$

この連立一次方程式の係数行列は、(xの)関数

$$f_j(x) = \exp(\alpha_j x + P(\alpha_j) y + Q(\alpha_j) t) - c_j \exp(\beta_j x + P(\beta_j) y + Q(\beta_j) t)$$

のwronski行列である。関数f_jは一次独立であり. xの解析関数であるから. その行列式、つまり. 関数f_jのwronskianは恒等的には零とはならない。従ってϕ_kが一意的に決定され, $\Phi(x,y,t,\lambda)$が一意的に定まる. 証明終.

Proposition 2. i) 関数 $\Phi(x.y.t,\lambda)$ は次の方程式をみたす

$$\sum_{j=0}^{m} u_j(x.y.t)\,\partial^j\Phi/\partial x^j = \partial\Phi/\partial y$$

$$\sum_{j=0}^{n} v_j(x.y.t)\,\partial^j\Phi/\partial x^j = \partial\Phi/\partial t$$

ここで、係数 u_j, v_j は ϕ_j, p_j, q_j から一意的に定まる。

ii) 関数 $\Phi(\xi.\eta,\lambda) = {}^t(\Phi_1(\xi.\eta,\lambda), \Phi_2(\xi.\eta,\lambda))$ は $u = -i\log(\phi_{1,0}/\phi_{2,0})$

を係数にもつ ii)の作用素 L, M の同時解である。

iii) $\Phi(t,\lambda) = \{\Phi_n(t,\lambda)\}$ は $a_n = \phi_{n+1,0}/\phi_{n,0}$, $b_n = \phi_{n,N-1} - \phi_{n+1,N-1}$

を係数に持つ iii)の作用素 L. M に対して

$$L\Phi = (\lambda+\lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial\Phi/\partial t$$

をみたす。

証明. Zakharov−Shabat 方程式について示す。$u_j(x.y.t)$ を

$$\sum_{j=\ell}^{m} u_j \sum_{k=\ell}^{j} {}_jC_k\, \partial^{j-k}\phi_{N-k+\ell}/\partial x^{j-k} = \sum_{j=\ell}^{m} \phi_{N-j+\ell}\,p_j, \quad \ell = 0,\cdots,m$$

なる連立一方程式から決める。この連立一次方程式の係数行列は対角成分が1の三角行列であるから、u_j は一意的に決定される。

$$F(x.y.t,\lambda) = \sum_{j=0}^{m} u_j\,\partial^j\Phi/\partial x^j - \partial\Phi/\partial y$$

とおけば、F は

$$F(x.y.t,\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j(x.y.t)\lambda^j\right)\exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

なる形であることがわかる。更に F は

$$F(x.y.t,\alpha_j) = c_j\,F(x.y.t,\beta_j) \qquad 1 \le j \le N$$

なる関係式をみたしていることから、Prop. 1 の証明と同様にして、今度は $f_j = 0$ つまり $F \equiv 0$ が得られる。

従って、Φ はこのように定めた u_j に対して

$$\sum_{j=0}^{m} u_j \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial y$$

をみたす。もう一方の方程式についても同様。　証明終

注意. $P(\alpha_j) = P(\beta_j)$　$1 \leq j \leq N$ なる関係式が成立している場合、(*) から ϕ_j は y に依らないことがわかる。従ってこのとき u_j, v_j も y には依らず

$$\sum_{j=0}^{m} u_j(x,t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j = P(\lambda) \tilde{\Phi}$$

$$\sum_{j=0}^{n} v_j(x,t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j = \partial \tilde{\Phi} / \partial t$$

$\tilde{\Phi}(x,t,\lambda) = \Phi(x,y,t,\lambda) e^{-yP(\lambda)}$

が成り立つ。

以上のことから、（λ がパラメーターとして Φ に含まれているから）二つの線型方程式の compatibility condition として

定理. 上で構成した、$u_j(x,y,t)$, $v_j(x,y,t)$　$a_n(t), b_n(t)$ はそれぞれ、Zakharov-Shabat 方程式、sine-Gordon 方程式、戸田格子の方程式の解である。

2. 解の表示

二次元KdV方程式を例にとり、上で得た解が、散乱の逆問題の方法で得られている多重ソリトン解と同一であることを示す。

この場合、$P(\lambda)=\lambda^2$, $Q(\lambda)=\lambda^3+a\lambda$ $a\in\mathbb{C}$ とおいて計算すれば、

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,y,t),\quad M=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(\frac{3}{2}u(x,y,t)+a\right)\frac{\partial}{\partial x}+v(x,y,t)$$

$$u=-2\,\partial\phi_{N-1}/\partial x,\quad v=-\partial^2\phi_{N-1}/\partial x^2+3\phi_{N-1}\,\partial\phi_{N-1}/\partial x-3\,\partial\phi_{N-2}/\partial x$$

となり、非線型方程式は

$$3(u_y+u_{xx})=4v_x$$

$$v_y-u_t=v_{xx}-u_{xxx}-\frac{3}{2}uu_x-a\,u_x$$

あるいはvを消去して

$$3u_{yy}-4u_{xt}+u_{xxxx}+6(uu_x)_x+4a\,u_{xx}=0$$

となる。この方程式が二次元KdV方程式である。

連立一次方程式(*)を解くことにより

$$\phi_{N-1}=-\frac{\det(f,f',\cdots,f^{(N-2)},f^{(N)})}{\det(f,f',\cdots,f^{(N-1)})}=-\frac{\partial}{\partial x}\log\det(f,f',\cdots,f^{(N-1)})$$

$$f={}^t(f_1,\cdots,f_N)$$

である。従って、

$$u=2\,(\partial^2/\partial x^2)\log\det(f,f',\cdots,f^{(N-1)})$$

が二次元KdV方程式の解である。この表示式はwronskian

の対数微分という形である。一方、散乱の逆問題の方法で得られている解は、Gram 行列式の対数微分という形で表わされている。以下でその変形を述べる。

まず

$$\det(f, f', \cdots, f^{(N-1)}) = \exp\left\{\sum_{l=1}^{N}\left(\alpha_l x + P(\alpha_l)y + Q(\alpha_l)t\right)\right\}\times$$

$$\times \det\left[\alpha_j^{k-1} - c_j\beta_j^{k-1}\exp\left\{(\beta_j-\alpha_j)x + (P(\beta_j)-P(\alpha_j))y + (Q(\beta_j)-Q(\alpha_j))t\right\}\right]$$

と変形する。ここで、行列 (α_j^{k-1}) の逆行列をはさんで

$$= \exp\{\ //\ \}\det(\alpha_j^{k-1})\det\left((\alpha_j^{k-1})^{-1}\left(\alpha_j^{k-1} - c_j\beta_j^{k-1}\exp(\quad)\right)\right)$$

$$= \exp\{\ //\ \}\prod_{a>b}(\alpha_a-\alpha_b)\det\left(\delta_{jk} - c_j\frac{\prod_{l\neq k}(\beta_j-\alpha_l)}{\prod_{l\neq k}(\alpha_k-\alpha_l)}\exp(\quad)\right)$$

となる。$g(\lambda) = \prod_{j=1}^{N}(\lambda-\alpha_j)$　$\dot{g} = dg/d\lambda$ とおけば

$$= \exp\{\ //\ \}\prod_{a>b}(\alpha_a-\alpha_b)\det\left(\delta_{jk} - \frac{c_j}{\beta_j-\alpha_k}\frac{g(\beta_j)}{\dot{g}(\alpha_k)}\exp(\quad)\right)$$

となる。対数をとって二回微分するので

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det\left(\delta_{jk} - \frac{c_j}{\beta_j-\alpha_k}\frac{g(\beta_j)}{\dot{g}(\alpha_k)}\exp\left((\beta_j-\alpha_j)x + (\beta_j^2-\alpha_j^2)y + (\beta_j^3-\alpha_j^3)t + a(\beta_j-\alpha_j)t\right)\right)$$

となる。この式を Gam 行列式の形に直すのは容易である。

II. 時空二次元の古典場のモデルの場の方程式の準周期解の構成.

1. Zakharov − Mikhailov の定式化

Zakharov − Mikhailov [17] は, 時空二次元の古典場のモデルの場の方程式のクラスとして, 次の形のものを提唱した。$U(\xi,\tau,\lambda)$, $V(\xi,\tau,\lambda)$ を $N\times N$ 行列で, その成分は, 複素パラメーター λ の関数としては有理関数で, その極は (ξ,τ) に依らないとする。その時

$$[i\partial/\partial\xi - U,\ i\partial/\partial\tau - V] = 0 \tag{1}$$

の形に表わされる方程式系を考える。このクラスには, 現在迄に知られている時空二次元の古典場のモデルの方程式はすべて含まれる。(その例については後で触れる.)

この方程式系には次の不定性がある。U, V を方程式系(1)の解とし, Ψ を線型方程式

$$i\partial\Psi/\partial\xi = U\Psi,\quad i\partial\Psi/\partial\tau = V\Psi$$

(これらの線型方程式の compatibility condition が方程式系(1)である.) の同時解とする。$f(\xi,\tau)$ を任意の non-singular な行列とし,

$$\tilde{U} = fUf^{-1} + if_\xi f^{-1},\quad \tilde{V} = fVf^{-1} + if_\tau f^{-1} \tag{2}$$

$$\tilde{\Psi} = f\Psi$$

とおけば, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ の極は U, V の極と一致し, 更に $\tilde{\Psi}$ は線型

方程式

$$i\partial\tilde{\Psi}/\partial\xi=\tilde{U}\tilde{\Psi},\quad i\partial\tilde{\Psi}/\partial\eta=\tilde{V}\tilde{\Psi}$$

をみたす。つまり $\tilde{U},\tilde{V}$ も方程式系(1)の解である。従って、方程式系(1)の解には、任意関数の不定性が残る。そこで、f を指定することを、gauge を指定するといい、f の種々の選び方に応じて得られる方程式系を互いに gauge equivalent であるといい、変換(2)を gauge 変換と呼ぶ。

上の方程式系(1)の例として、U が $\lambda=-1$ に唯一つの一位の極を持ち、V が $\lambda=1$ に唯一つの一位の極を持つ場合を考える:
$$U=U_0+\frac{U_1}{\lambda+1},\quad V=V_0+\frac{V_1}{\lambda-1}.$$

この時、方程式系(1)は

$$U_{0\eta}-V_{0\xi}-i[U_0,V_0]=0 \tag{3}$$
$$U_{1\eta}-i[U_1,V_0-\tfrac{1}{2}V_1]=0$$
$$V_{1\xi}-i[V_1,U_0+\tfrac{1}{2}U_1]=0$$

となる。f を

$$U_0=-if^{-1}f_\xi,\quad V_0=-if^{-1}f_\eta$$

なるように選ぶ。(方程式(3)がこれらの線型方程式の compatibility condition である)。その時、f により gauge 変換を行なえば、線型方程式

$$i\partial\Psi/\partial\xi=\frac{A}{\lambda+1}\Psi,\quad i\partial\Psi/\partial\eta=-\frac{B}{\lambda-1}\Psi$$
$$A=fU_1f^{-1},\quad B=-fV_1f^{-1}$$

と compatibility condition の非線型方程式

$$A_\eta = \frac{i}{2}[A, B], \quad B_\xi = -\frac{i}{2}[A, B] \tag{4}$$

が得られる。

方程式 (4) より、A の Jordan標準形 A_0 は η に依らず、B の Jordan 標準形 B_0 は ξ に依らないことがわかる。行列 A を標準化する行列を g とする： $A_0 = A_0(\xi) = gAg^{-1}$

g により、gauge 変換を行なえば、線型方程式

$$i\Psi_\xi + C\Psi + \frac{z}{2}A_0\Psi = 0 \qquad C = -\frac{1}{2}A_0 - ig_\xi g^{-1}$$

$$i\Psi_\eta + S\Psi + \frac{1}{2z}\Gamma\Psi = 0 \qquad S = -ig_\eta g^{-1} - \frac{1}{2}gBg^{-1},\ \Gamma = gBg^{-1}$$

$$z = (\lambda-1)/(\lambda+1)$$

と、compatibility condition の非線型方程式

$$-C_\eta + S_\xi - i[C, S] - \frac{i}{4}[A_0, \Gamma] = 0 \tag{5}$$

$$A_{0\eta} + \frac{i}{2}[A_0, S] = 0 \tag{6}$$

$$\Gamma_\xi + i[\Gamma, C] = 0$$

が得られる。

ここで、更に A_0 が対角行列で、対角成分がそれに相異なるとすれば、方程式 (6) より、S も対角行列であることがわかる。この時 $C = C_\perp + C_{/\!/}$ $C_{/\!/}$：対角行列 と表わし、方程式 (5) の対角成分をみれば、

$$C_{/\!/\eta} = S_\xi$$

であることがわかる。従って

$$C_{11} = R_\xi \ , \ S = R_\eta$$

なるような対角行列 R が存在する。

e^{-iR} により gauge 変換を行なえば、線型方程式は

$$i\Psi_\xi + Q_1\Psi + \frac{\xi}{2}A_0\Psi = 0 \qquad Q_1 = e^{-iR}C_\perp e^{iR}$$

$$i\Psi_\eta + \frac{1}{2\xi}Q_2\Psi = 0 \qquad Q_2 = e^{-iR}\Gamma e^{iR}$$

となり、compatibility condition の非線型方程式は

$$Q_{1\eta} = \frac{i}{4}[Q_2, A_0], \quad Q_{2\xi} = i[Q_1, Q_2] \tag{7}$$

となる。この方程式系は、Budagov−Takhtadzian [2] が考察している。

このノートで準周期解を考えるのは、方程式系 (4) および方程式系 (7) である。これらは互いに gauge equivalent である。gauge equivalence が解の構成にどのように反映するかについては、次節で触れる。

2. 準周期解の構成

初めに、方程式系 (7) の準周期解の構成を考える。

次の data $\{S, \lambda, \delta, a_j(\xi), b_j(\eta)\ 1 \le j \le N\}$ が与えられたとする。ここで

S: 種数 $g > 0$ の compact Riemann 面

λ: S 上の order N の有理型関数で、その極 $P_1, \cdots, P_N$ は互いに相異なり、零点 $Q_1, \cdots, Q_N$ は互いに相異なる。

$\delta = D_1 + \cdots + D_{g+N-1}$: S 上の因子で、各 $j = 1, \cdots, N$ に対して $\dim \mathcal{L}(\delta - P_1 - \cdots - \check{P}_j - \cdots - P_N) = 1$ なるもの。

$a_j(\xi), b_j(\eta)$: 適当に滑らかな関数.

である。

この data $\{S, \lambda, \delta, a_j(\xi), b_j(\eta)\}$ から、方程式系 (7) の準周期解を構成できることを示す。

点 P_j の local parameter としては $(\lambda(P))^{-1}$、点 Q_j の local parameter としては $\lambda(P)$ を固定しておく。

次の性質を持った関数 $\Psi_j(\xi, \eta, P)$ $1 \leq j \leq N$ $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $P \in S$ を構成することを考える。

i) Ψ_j は $S - \{P_1, \cdots, P_N, Q_1, \cdots, Q_N\}$ で一価有理型で、その極因子は δ に等しい。

ii) Ψ_j は P_k の近傍で

$$\Psi_j(\xi, \eta, P) = \left(\delta_{jk} + O(\lambda^{-1})\right) \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \int^{\xi} a_k(\xi') d\xi'\right)$$

と展開され、Q_k の近傍で

$$\Psi_j(\xi, \eta, P) = \left(O(1)\right) \exp\left(\frac{i}{2\lambda} \int^{\eta} b_k(\eta') d\eta'\right)$$

と展開される。

このような性質を持った関数 $\Psi_j(\xi, \eta, P)$ が存在したとすれば、$d \log \Psi_j$ は S 上の abel 微分となり、その極の様子は、

D_k $(1 \leq k \leq g+N-1)$ で留数 -1 の一位の極

$$P_k \ (1 \leq k \leq N) \text{ で } -\frac{i}{2z^2}\left(\int^{\zeta} a_k(\zeta)d\zeta\right)dz + \delta_{jk}\frac{dz}{z} \qquad z=\lambda^{-1}$$

$$Q_k \ (1 \leq k \leq N) \text{ で } -\frac{i}{2\lambda^2}\left(\int^{\tau} b_k(\tau)d\tau\right)d\lambda$$

の形の極を持つ。abel微分の留数の和は零であるから、更にg個の点 $P_{jn}(\zeta,\tau)$ $(n=1,\cdots,g)$ で留数1の一位の極を持つ。

$P_{jn}(\zeta,\tau)$ が $\mathcal{S}$ 上の Jacobi の逆問題の解となっていることが次の様にしてわかる。

α_j, β_j $1 \leq j \leq N$ を $\mathcal{S}$ 上の canonical homology basis

ω_j $1 \leq j \leq N$ を正規化第一種微分の基底

$\omega(P,Q)$ を点 P, Q でそれぞれ留数 $1,-1$ の一位の極を持つ、正規化第三種微分。

$\omega_{P_j,2}$ を P_j の近で $\frac{1}{2z^2}dz$ の形の極を持つ正規化第二種微分。$\omega_{Q_j,2}$ を Q_j の近で $\frac{1}{2\lambda^2}d\lambda$ の形の極を持つ正規化第二種微分。

とすれば、

$$\begin{aligned} d\log\Psi_j = -i\sum_{l=1}^{N}\left\{\left(\int^{\zeta} a_l(\zeta)d\zeta\right)\omega_{P_l,2} + \left(\int^{\tau} b_l(\tau)d\tau\right)\omega_{Q_l,2}\right\} \\ + \sum_{l=1}^{g}\omega(P_{jl}(\zeta,\tau), D_l) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j\,(D_{g+N}=D_{g+j})}}^{N}\omega(P_l, D_{g+l}) + \sum_{l=1}^{g} c_l\omega_l \end{aligned} \tag{8}$$

と表わされる。

Ψ_j が $\mathcal{S}$ 上一価であることから

$$\int_{\alpha_k} d\log\Psi_j = 2\pi i\, m_{jk}, \quad \int_{\beta_k} d\log\Psi_j = 2\pi i\, n_{jk}, \qquad m_{jk}, n_{jk} \in \mathbb{Z}$$

である。この関係式を具体的に書くことにより、$P_{jn}(\zeta,\tau)$ は次の Jacobi の逆問題の解であることがわかる。

$$\left(\sum_{l=1}^{g}\int_{D_l}^{P_{jl}(\xi,\eta)}\omega_k\right)\equiv\left(i\sum_{l=1}^{N}\left\{\left(\int^{\xi}a_l(\xi')d\xi'\right)U_{lk}+\left(\int^{\eta}b_l(\eta')d\eta'\right)V_{lk}\right\}-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N}\int_{D_{g+l}}^{P_l}\omega_k\right) \bmod \Gamma \quad (D_{g+0}=D_{g+j})$$

ここで、 $U_{lk}=2\pi i\int_{\beta_k}\omega_{P_l,2}$, $V_{lk}=2\pi i\int_{\beta_k}\omega_{Q_l,2}$ で Γ は各の ω_j に関する周期行列の列ベクトルで生成される C^g の lattice である。

逆に、この Jacobi の逆問題を解いて $P_{jn}(\xi,\eta)$ を定め、(8)の右辺で abel 微分 χ_j を定義すれば、関数 $\exp\left(\int_{P_0}^{P}\chi_j\right)$ $(P\in S)$ は定数倍を除いて、上に挙げた Ψ_j の性質をみたす。

次に Ψ_j のみたす微分方程式を求める。

$$\Psi_j(\xi,\eta,P)=\left(\delta_{jk}+\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l^{jk}(\xi,\eta)\lambda^{-l}\right)\exp\left(\frac{i\lambda}{2}\int^{\xi}a_k(\xi')d\xi'\right)\quad \text{around } P_k$$

$$\Psi_j(\xi,\eta,P)=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l^{jk}(\xi,\eta)\lambda^{l}\right)\exp\left(\frac{i}{2\lambda}\int^{\eta}b_k(\eta')d\eta'\right)\quad \text{around } Q_k$$

とする。 α_l^{jk}, β_l^{jk} は S 上の theta 関数を用いて表示できる。

関数

$$F_j=\partial\Psi_j/\partial\xi-\frac{i\lambda}{2}a_j\Psi_j-\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_j)\alpha_1^{jn}\Psi_n$$

は、上に挙げた Ψ_j の性質をみたし、更に P_k $1\leq k\leq N$ で零となる。従って関数 F_j/Ψ_j は $P_{jn}(\xi,\eta)$ $1\leq n\leq g$ に極を持つ S 上の有理型関数で P_j で零となる。従って恒等的に零である。つまり、 $\Psi={}^t(\Psi_1,\cdots,\Psi_N)$ とおけば、 Ψ は微分方程式

$$i\Psi_\xi+\frac{1}{2}[\alpha,A_0]+\frac{\lambda}{2}A_0\Psi=0$$

$$\alpha=(\alpha_1^{jk})\qquad A_0=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_N)$$

をみたしている。

同様にして、Ψ は

$$i\Psi_\eta + \frac{1}{2\lambda}\beta B_0 \beta^{-1}\Psi = 0 \qquad \beta_0 = (\beta_0^{jk}),\ B_0 = \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_N)$$

もみたす。

こうして、方程式系(7)の解を構成できた。

方程式系(4)に対しては、data $\{S, \lambda, \delta, a_j(\xi), b_j(\eta)\}$ のうち、λ に関する条件を、

$$\lambda^{-1}(-1)=\{P_1',\dots,P_N'\},\ \lambda^{-1}(1)=\{Q_1',\dots,Q_N'\},\ \lambda^{-1}(\infty)=\{P_1,\dots,P_N\}$$

がそれぞれ互いに相異なるという条件に置き換える。P_j' の local parameter としては $\lambda+1$ を Q_j' の local parameter としては $\lambda-1$ をとる。

Ψ_j の性質としては

i) の $S-\{P_1,\dots,P_N,Q_1,\dots,Q_N\}$ を $S-\{P_1',\dots,P_N',Q_1',\dots,Q_N'\}$ に、

ii) を、

ii') Ψ_j は P_k' の近傍で

$$\Psi_j(\xi,\eta,P) = (\text{regular part})\times\exp\left(-\frac{i}{\lambda+1}\int^{\xi} a_k(\xi)\,d\xi\right)$$

と展開され、Q_k' の近傍で

$$\Psi_j(\xi,\eta,P) = (\text{regular part})\exp\left(\frac{i}{\lambda-1}\int^{\eta} b_k(\eta)\,d\eta\right)$$

と展開される。更に $\Psi_j(P_k)=\delta_{jk}$ にかえる。

構成は同様にできて、Ψ は次の線型方程式をみたす。

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{\gamma_0 A_0 \gamma_0^{-1}}{\lambda+1}\Psi, \qquad i\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -\frac{\varepsilon_0 B_0 \varepsilon_0^{-1}}{\lambda-1}\Psi$$

ここで．γ_0．ε_0 は

$$\Psi_j(\xi,\eta,P) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l^{jk}(\lambda+1)^l\right)\exp\left(-\frac{i}{\lambda+1}\int^{\xi} a_k(\xi')d\xi'\right) \quad \text{around } P_k$$

$$\Psi_j(\xi,\eta,P) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l^{jk}(\lambda-1)^l\right)\exp\left(\frac{i}{\lambda-1}\int^{\eta} b_k(\eta')d\eta'\right) \quad \text{around } Q_k$$

とするとき，

$$\gamma_0 = (\gamma_0^{jk}), \qquad \varepsilon_0 = (\varepsilon_0^{jk})$$

で定める。

こうして方程式系（4）の解が構成できた。

3．例.

a) Pohlmeyer [15] は二次元 O(4) nonlinear σ-model の方程式

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + (\partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi)\phi = 0 \qquad \phi = \phi(x^0, x^1) \in S^3$$

が方程式系

$$\begin{aligned} &\alpha_{\xi\eta} - \beta_\xi\beta_\eta \sin\tfrac{\alpha}{2}/2\cos^3\tfrac{\alpha}{2} + \sin\alpha = 0 && \xi = \tfrac{1}{2}(x^0+x^1) \\ &\beta_{\xi\eta} + (\alpha_\xi\beta_\eta + \alpha_\eta\beta_\xi)/\sin\alpha = 0 && \eta = \tfrac{1}{2}(x^0-x^1) \end{aligned} \tag{9}$$

に帰着できることを示し、方程式系（9）が線型方程式

$$i\varphi_\xi - \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & (\alpha_\xi - i\beta_\xi\tan\frac{\alpha}{2})e^{-i\omega} \\ -(\alpha_\xi + i\beta_\xi\tan\frac{\alpha}{2})e^{i\omega} & 0 \end{bmatrix}\varphi + \frac{z}{2}\varphi = 0$$

$$i\varphi_\eta + \frac{1}{2\xi}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\, e^{-i\omega}\\ -\sin\alpha\, e^{i\omega} & -\cos\alpha\end{bmatrix}\varphi = 0$$

$$\omega_\xi = \beta_\xi \cos\alpha / 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad \omega_\eta = \beta_\eta / 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

の compatibility condition であることを示した。

b) Lund-Regge [10] は四次元時空で static な massless scalar fields と interaction している homogeneous な relativistic string の方程式

$$x_{\tau\tau} - x_{\sigma\sigma} + 2x_\tau \times x_\sigma = 0 \qquad x = x(\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^3 \quad (10)$$

$$x_\tau^2 + x_\sigma^2 = 1 \qquad x_\tau \cdot x_\sigma = 0$$

が（曲面の三次元ユークリッド空間への埋め込みの理論を用いることにより）方程式系

$$\begin{aligned} &u_{\xi\eta} + \sin u \cos u + v_\xi v_\eta \cos u / \sin^3 u = 0 && \xi = \tfrac{1}{2}(\tau+\sigma) \\ &v_{\xi\eta} - (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi)/\sin u \cos u = 0 && \eta = \tfrac{1}{2}(\tau-\sigma) \end{aligned} \quad (11)$$

と同値であることを示し、方程式系 (11) が、線型方程式

$$i f_\xi + u_\xi \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} f + \frac{v_\xi}{2\sin^2 u}\begin{bmatrix}0 & e^{2iu}\\ e^{-2iu} & 0\end{bmatrix} f + \frac{\lambda}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} f = 0$$

$$i f_\eta - \frac{v_\eta}{2\sin^2 u}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} f + \frac{1}{2\lambda}\begin{bmatrix}0 & e^{2iu}\\ e^{-2iu} & 0\end{bmatrix} f = 0$$

の compatibility condition であることを示した。

c) Getmanov [5] は時空二次元の complex scalar field のモデルの方程式

$$(1-|\phi|^2)\phi_{\xi\eta} + \phi^* \phi_\xi \phi_\eta - \phi(1-|\phi|^2)^2 = 0$$

を考え．2−soliton解を求めた．（N−ソリトンも同様にできると述べている．）この方程式は

$$\phi = \sin\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\beta}{2}}$$

とおくことにより，方程式系 (9) に帰着する．（cf Kulish[9], Neveu−Papanicolaou [13]）．

d) Neveu−Papanicolaou [13] は scalar contact interaction をしている2個の classical massless fermion の運動方程式

$$[i\partial\!\!\!/ - (\sigma + i\pi\gamma^5)]\,\psi_i = 0 \qquad i = 1.2$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \psi_j^* \psi_j, \qquad \pi = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{2} \psi_i^* \gamma^5 \psi_i$$

が方程式系 (9) に帰着することを示した．

方程式系 (9) と方程式系 (11) との対応は次で与えられる。

$$u = \frac{1}{2}\alpha, \quad v_\xi = \frac{1}{2}\beta_\xi \tan^2\frac{\alpha}{2}, \quad v_\eta = -\frac{1}{2}\beta_\eta \tan^2\frac{\alpha}{2}$$ （cf. Kulish[ ]）

尚．$\mathbb{R}^3$ と $su(2)$ との対応

$$(x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}$$

を用いれば，方程式 (10) は，$iA, iB \in su(2)$ としたときの方程式系 (4) である。

2で述べた構成で，S として超楕円曲線 $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2N+2}(\lambda - \lambda_j)$

$\lambda_i \neq 0$ （or $\lambda_j \neq -1, 1$）をとり，$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

とれば、方程式系 (9) で α, β を複素数値とした解（方程式 (10) で $x \in \mathbb{C}^3$ とした解）を構成できる。

References

1. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur : Method for Solving the Sine-Gordon equation. Phys. Rev. Lett., 30 (1973), 1262–1264

2. A. S. Budagov and L. A. Takhtadzian : A Non-linear One-demensional Model of Classical Fields Theories with Internal Degrees of Freedom. Soviet Phys. Dokl. 22 (1977), 428–430

3. V. G. Drinfeld : Commutative Subring of Certain Noncommutative Rings. Funct. Anal. and Its Appl. 11 (1977), 9–12.

4. H. Flaschka : On the Toda Lattice II : Prog. Theor. Phys. 51 (1974), 703–716.

5. B. S. Getmanov : New Lorentz-Invariant System with Exact Multi-Soliton Solutions. JETP. Lett. 25 (2), (1977), 119–122.

6. I. M. Kricheber : Algebro-geometric Construction of the Zakharov-Shabat Equations and Their Periodic Solutions. Soviet Math. Dokl. 17 (1976) 394–397

7. —— : Algebraic Curves and Commuting Matrical Differential Operators. Funct. Anal and Its Appl. 10 (1976), 144–146.

8. —— : Integration of Nonlinear Equations by the Method of Algebraic Geometry. Funct. Anal. and Its Appl. 11 (1977), 12–26.

9. P. P. Kulish : Conservation Laws for a String in a Static Field. Theor. Math. Phys. 33 (1977), 1016–1018.

10. F. Lund and T. Regge : Unified Approach to Strings and Vortices with Soliton Solutions. Phys. Rev. D 14 (1976), 1524–1535.

11. S. V. Manakov: Complete Integrability and Stochastization of Discrete Dynamical Systems. Soviet Phys. JETP. 40 (1974). 269–274.

12. Yu. I. Manin: Matrix Solitons and Bundles over Curves with Singularities, Funct. Anal. and Its Appl. 12 (4) (1978), 53–67. (Russian)

13. A. Neveu and N. Papanicolaou: Integrability of the Classical $[\bar{\psi}_i \psi_i]_2^2$ and $[\bar{\psi}_i \psi_i]_2^2 - [\bar{\psi}_i \gamma \psi_i]_2^2$ Interactions. Commun. math. Phys. 58 (1978), 31–64.

14. S. P. Novikov: The Periodic Problem for the Korteweg-de Vries Equation. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 236–246.

15. K. Pohlmeyer: Integrable Hamiltonian Systems and Interactions through Quadratic Constraints. Commun. math. Phys. 46 (1976), 207–221.

16. V. E. Zakharov, L. A. Takhtadjian, and L. D. Faddeev: Complete Description of Solutions of the "Sine-Gordon" equation. Soviet Phys. Dokl., 19 (1975), 824–826.

17. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. Jour. Exp. and Theor. Phys. 74 (6) (1978), 1953–1973. (Russian)

18. V. E. Zakharov and A. B. Shabat: A Scheme for Integrating the Nonlinear Equations of Mathematical Physics by the Method of Inverse Scattering Problem. I. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 226–235.