数理解析研究所講究録
第349巻 1979年 89-95

領域変形と熱方程式の基本解

東大 理 小沢 真

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域で C^∞ 境界 γ をもつものとする。$\rho(x) \in C^\infty(\gamma)$ を fix し、ν_x で $x \in \gamma$ における単位外向き法線 vector を表わすとする。$\gamma_\varepsilon = \{ x + \varepsilon\rho(x)\nu_x \ ; x \in \gamma \}$ は ε が 0 に十分近いとき $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 超曲面をあらわすが、Ω_ε で γ_ε が囲む有界領域をあらわすとする。$U_\varepsilon(x, y, t)$, $x, y \in \Omega_\varepsilon$, $t > 0$ で熱方程式 (Dirichlet 条件 at γ_ε) の基本解とする。次の公式がなりたつ。⊗ 定理 1 ～ 7 については [5] または [6] を参照。

定理 1.

$x, y \in \Omega$, $t > 0$ fix のとき

$$\delta U(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_\gamma \frac{\partial U(x, z, t-\tau)}{\partial \nu_z} \frac{\partial U(y, z, \tau)}{\partial \nu_z} \rho(z) d\sigma_z$$

ここで $\delta U(x, y, t)$ は次式で定義される。

$$\delta U(x,y,t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\left(U_\varepsilon(x,y,t) - U(x,y,t)\right).$$

（注： Laplacian の Green 函数にかんする Hadamard 変分公式 [2] が熱方程式の基本解に対しても、ほぼ似た形で成立することを定理 1 は示している。長年に亘り、この定理がみつからなかったという事は、不思議でならない。）

さて、次式で熱方程式の基本解のトレース（partition function）を定義する。

$$\mathrm{Tr}(t,\varepsilon) \equiv \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x,x,t)\,dx$$

そのとき、

<u>定理 2.</u>

$$\delta \mathrm{Tr}(t) = \int_{\Omega} \delta U(x,x,t)\,dx$$

ここで

$$\delta \mathrm{Tr}(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\left(\mathrm{Tr}(t,\varepsilon) - \mathrm{Tr}(t,0)\right)$$

と定義した。

今　$0 > \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_j \geq \cdots$

で Laplacian (Dirichlet 条件) の固有値達(重複度に応じて、並べておく)とする。$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ で L^2 の正規直交基底を張る固有函数達とする。$\varphi_j(x)$ は λ_j の固有空間に属するとする。その時

$$U(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$$

と Fourier 展開される。この式を定理 1 , 定理 2 に適用して、次の結果を得る。

定理 3

$$\delta\left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}\right) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu_z}(z)\right)^2 \rho(z)\, d\sigma_z$$

(注 : Dirichlet 級数の変分が Dirichlet 級数で再び書けるという意味で、非常に示唆的な内容を含んでいる。

次の漸近展開式 Minakshisundaram—Pleijel [4] はよく知られている。

$t \downarrow 0$ に対し、

$$\mathrm{Tr}(t;\varepsilon) \sim a_n(\varepsilon)t^{-\frac{n}{2}} + a_{n-1}(\varepsilon)t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} + \cdots + a_{n-k}(\varepsilon)t^{-\frac{n}{2}+\frac{k}{2}} + \cdots$$

我々は、$\delta\mathrm{Tr}(t)$ に対しても同様の漸近展開式が成立することを証明できる。

<u>定理4</u>　　$t \downarrow 0$ のとき、

$$\delta\mathrm{Tr}(t) \sim b_n t^{-\frac{n}{2}} + b_{n-1} t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} + \cdots + b_{n-k} t^{-\frac{n}{2}+\frac{k}{2}} + \cdots$$

Minakshisundarum-Pleijel の展開と、定理4をくらべて、次の事が成立することが予想される。

<u>予想</u>　　$b_{n-k} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_{n-k}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$

この予想は、$k=0, 1$ の場合肯定的に解けている。一般のときは未解決である。

<u>定理5.</u>

$$b_n = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_n(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}, \quad b_{n-1} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_{n-1}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}.$$

次のような式の $t\downarrow 0$ での漸近挙動について調べる。

$$B(z,t) \equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega \frac{\partial U(x,z,t-\tau)}{\partial \nu_z} \frac{\partial U(x,z,\tau)}{\partial \nu_z} dx$$

擬微分作用素を用いた議論により、次の公式がなりたつ。

定理 6　　$t\downarrow 0$ のとき

$$B(z,t) \sim B_n(z)t^{-\frac{n}{2}} + B_{n-1}(z)t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} + \cdots + B_{n-k}(z)t^{-\frac{n}{2}+\frac{k}{2}} + \cdots$$

と漸近展開される。$B_{n-k}(z)$ は $z\in\gamma$ の C^∞ 函数.

㊟ 研究集会では、$B_{n-k}(z)$ が境界 γ の幾何を反映している事、および、古典的な不変式論を用いて、その形が定まってしまう事（Atiyah－Bott－Patodi の思想 [1]）などについて言及した。それらについては、[6] に収録されているので参照されたい。

さて、$B_n(z) = C_n$　，$B_{n-1} = C_{n-1}\times(n-1)H_1(z)$

が成りたつ事が証明できる。C_{n-1} は n にのみ依存した非零な数，$H_1(z)$ は $z\in\gamma$ における第1平均曲率。

定理6の"解析"への寄与について述べて終わりにしたい。定理6より、

$$t\sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu_z}(z)\right)^2\Bigg|_{z\in\gamma} \sim C_n t^{-\frac{n}{2}} + O(t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}})$$

であるが、Tauber型定理が適用できて、次の定理を得る。

<u>定理7</u>　　$\lambda \longrightarrow \infty$ のとき

$$\sum_{-\lambda_j<\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu_z}(z)\right)^2\Bigg|_{z\in\gamma} \sim \frac{C_n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{\frac{n}{2}+1} + O(\lambda^{\frac{n}{2}+1})$$

が成りたつ。

$\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)$ の $N \longrightarrow \infty$ のときの漸近挙動は、Hörmander [3] などによって調べられている。(もちろん、もっと古くから) しかし、x, y ともに Ω の内部を動くときに議論が制限されるという問題点があった。境界近傍での固有函数の挙動については、定理7が、良く、その状況を表現していると思われる。

文献

[1] Atiyah-Bott-Patodi ; On the heat equation and the index theorem. Inventiones math. 19, 279–330 (1973).

[2] Hadamard ; Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Oeurres, C.N.R.S tom. 2, 515-631 (1968) Hadamardの論文は1908年に出版

[3] Hörmander ; The spectral function of an elliptic operator .. Acta Math., 121, 193–218 (1968)

[4] Minakshisundarum-Pleijel ; Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. Canad. J. Math., 1, 242–256 (1949).

[5] Ozawa ; Perturbation of domains and Green kernels of heat equations. Proc. Japan Acad, 54 A, 322–325 (1978)

[6] ―― ; 東京大学修士論文 129p