

## 波束型攪乱に対する線型安定理論

航技研 伊藤信毅

### 1. 序

平流の流れあるいは近似的に平行と見なせる流れの微小攪乱に対する安定性についてはすでに非常に多くの研究がなされている。しかし、その大部分は単色波型の攪乱を対象としたものであり、その場合攪乱の波数 $n$ は振動数 $\omega$ のどちらか一方を実数定数として与え、他方を複素数の固有値として決定する固有値問題を解くことになる。流れの安定不安定は、攪乱の増幅率または減衰率を表わす固有値の虚数部が正であるか負であるかによって判定され、とくにその値が丁度零になるときを中立安定と呼ぶ。二次元 Poiseuille 流や Blasius 型境界層流れなど代表的な速度分布形に関しては、多くの研究者によってこの種の固有値計算が行われている。(Shen 1954, Lin 1955, Jordinson 1970, Itoh 1974, その他)

単色波型の攪乱は空間的または時間的に一定の波数または

振動数を持つことにならるので、例えば Schubauer と Skramstad (1948) が行った実験のように外部から一定の周波数を持つ強制力を加えて人工的に発生させた攪乱を表現していることにはなる (Gaster 1965)。そこで、もっと自然な形の攪乱、すなわち波数や振動数および振幅がすべて時間的にも空間的にもゆるやかに変化する波束型攪乱に対する安定問題を扱うことが Gaster (1968) や Stewartson と Stuart (1971) 等によって始められた。Gaster は時間が十分大きくなったときの攪乱の形状と発育状況と漸近法によって調べ、攪乱の波数と振動数、両方を複素数として扱うことの必要性を明らかにした。一方、Stewartson と Stuart は限界 Reynolds 数  $R_c$  よりわずかに大きい Reynolds 数  $R$  の場合を考へ、 $R - R_c$  に比例する微小パラメータを仲介とする多重尺度の方法を用いて非線型性をも含めた解析を行ない、攪乱振幅のゆるやかな変化が Schrödinger 型方程式に支配されることを導いた。しかしこの理論には  $|R - R_c|$  が十分小さい範囲でしか有効でないという大きな制約がある。

本稿では、Whitham (1974) の運動学的波動理論の手法を用いて波束型攪乱に対する流れの線型安定性を調べ、とくに波数と振動数がともに複素数の場合の中立曲線を与える。さらに、攪乱振幅の発達過程を記述する方程式系を導き、それが、Stewartson-Stuart 理論の一般化に相当することを確かめる。

## 2. 微小パラメタによる展開過程

二次元 Poiseuille 流の二次元被束型攪乱に対する線型安定性を考える。基本流と攪乱の流れ函数をそれぞれ  $\Psi_0(y) (= y - y^3/3)$ ,  $\psi(x, y, t)$  とすると、線型攪乱方程式はつぎのように書ける。

$$\left\{ \frac{1}{R} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})^2 - (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\Psi_0}{dy} \frac{\partial}{\partial x}) (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{d^2\Psi_0}{dy^2} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \psi = 0, \quad (2.1)$$

ただし、 $(x, y)$  は平板に平行および垂直な方向の座標、 $t$  は時間である。また、全ての量は平板間の半幅  $h$  と基本流の最大流速  $U_0$  で無次元化されているものとし、 $R$  は  $R = U_0 h / \nu$  ( $\nu$ : 動粘性係数) で定義される Reynolds 数である。境界条件は平板上 ( $y=1$ ) で攪乱速度が 0 になること、および平板間の中心線  $y=0$  に対して反対称な攪乱のみを考えることによつてつぎのようにならされる。

$$y=0 \text{ で } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad y=1 \text{ で } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Whitham (1974, chap. 11) の運動学的波動理論の手法に従つて、方程式 (2.1) の解をつぎの形におく。

$$\psi = e^{\frac{i}{\varepsilon} \Phi(\xi, \tau)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(y; \xi, \tau) \quad (2.3)$$

ただし、 $\varepsilon$  は微小パラメタであり、 $\xi$  と  $\tau$  は

$$\xi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon t \quad (2.4)$$

で定義される大きな尺度の空間座標と時間座標である。微小パラメタ  $\varepsilon$  は、局所的波長や周期で代表される短い尺度と被束全体の広がりなどに代表される長い尺度の比を表わす量

である。このとき、局所的波数  $k$  および振動数  $\omega$  は次式で定義される。

$$k(\xi, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \omega(\xi, \tau) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}. \quad (2.5)$$

本稿では、これらの量は一般に複素数として扱われるので、実際の波数と振動数は実数部  $k_r$  および  $\omega_r$  で表われ、虚数部  $k_i$  と  $\omega_i$  はそれぞれ空間的減衰率と時間的増幅率を表わす。

(2.5) から (2.4) を消去すると、つぎの関係式が得られる。

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0. \quad (2.6)$$

(2.3) および (2.5) を (2.1) と (2.2) に代入して  $\varepsilon$  の各べきの係数  $\varepsilon^0$  に等しいと置くと、未知函数  $\psi_n$  に対する無限個の方程式と境界条件の系が得られる。とくに  $\varepsilon$  の最低次の係数からはよく知られた Orr-Sommerfeld 型固有値問題が導かれる。いま、微分作用素

$$L = \frac{1}{R} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 - ik \frac{d\Psi_0}{dy} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) + ik \frac{d^2\Psi_0}{dy^3}, \quad M = \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \quad (2.7)$$

を導入すると、この問題はつぎの形に書かれる。

$$(L + i\omega M)\psi_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$\psi_0'(0; \xi, \tau) = \psi_0'''(0; \xi, \tau) = \psi_0(1; \xi, \tau) = \psi_0'(1; \xi, \tau) = 0 \quad (2.9)$$

ただし、 $\tau$  は  $\partial/\partial \tau$ 。これを解くと、無限個の固有値と固有函数の列が  $k$  の函数として得られるが、ここではそのうち固有値の虚数部、すなわち時間的増幅率が最大になるモードだけを考慮することにし、対応する固有値と固有函数を  $\Omega(k)$  および

$\phi_0(y; k)$  と書くことにする。このとき, (2.8) の解は

$$\psi_0 = a_0(\xi, \tau) \phi_0(y; k) \quad (2.10)$$

となり,  $a_0$  は  $\xi$  と  $\tau$  の任意函数である。また,  $\phi_0$  は  $k(\xi, \tau)$  を通してのみ  $\xi$  と  $\tau$  に依存する。一方,  $k(\xi, \tau)$  の変化を支配する方程式は

$$\omega = \Omega(k) \quad (2.11)$$

を (2.6) に代入することによって, つぎのように得られる。

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + C(k) \frac{\partial k}{\partial \xi} = 0 \quad (2.12)$$

ただし,  $C(k)$  は群速度を複素数領域に拡張したもので, 次式で定義される。

$$C(k) = \frac{d\Omega}{dk} \quad (2.13)$$

つぎに,  $\varepsilon^1$  次の係数から定まる方程式系は

$$\begin{aligned} (L + i\omega M) \psi_1 &= \frac{\partial a_0}{\partial \tau} M \phi_0 + i \frac{\partial a_0}{\partial \xi} \left( \frac{\partial L}{\partial k} + i\omega \frac{\partial M}{\partial k} \right) \phi_0 \\ &+ i a_0 \frac{\partial k}{\partial \xi} \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial k} + i\omega \frac{\partial M}{\partial k} + i \frac{d\omega}{dk} M \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial k} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} + i\omega \frac{\partial^2 M}{\partial k^2} + 2i \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial M}{\partial k} \right) \phi_0 \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\psi_1'(0; \xi, \tau) = \psi_1'''(0; \xi, \tau) = \psi_1(1; \xi, \tau) = \psi_1'(1; \xi, \tau) = 0 \quad (2.15)$$

となる。ただし,  $\partial L / \partial k$ ,  $\partial M / \partial k$  等は  $L, M \in k$  の函数と見て微分したものである。(2.14) の左辺は同次方程式(2.8)と同じ作用素を持つから, この方程式が解を持つためには, 右辺がある条件を満たす必要がある。いま, (2.8) に対応する随伴微分方程式の固有函数を  $\psi(y)$  とすると, (2.14) の可解条件は, 右辺に  $\psi(y)$  を乗じたのを,  $y$  に関して 0 から 1 まで積分したものを

が 0 に等しくなることである。ここで、(2.8) を  $k$  で一回微分したものと  $k$  の二回微分したものについて同様の可解条件を適用したとをに得られる関係

$$C \equiv \frac{d\omega}{dk} = i \int_0^1 \Phi \left( \frac{\partial L}{\partial k} + i\omega \frac{\partial M}{\partial k} \right) \phi_0 dy / \int_0^1 \Phi M \phi_0 dy \quad (2.16)$$

$$C' \equiv \frac{d^2\omega}{dk^2} = 2i \int_0^1 \Phi \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial k} + i\omega \frac{\partial M}{\partial k} + i \frac{d\omega}{dk} M \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial k} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} + i\omega \frac{\partial^2 M}{\partial k^2} + 2i \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial M}{\partial k} \right) \phi_0 \right\} dy / \int_0^1 \Phi M \phi_0 dy \quad (2.17)$$

を利用すると、(2.14) の可解条件は結局  $\omega$  のように書ける。

$$\frac{\partial a_0}{\partial \bar{z}} + C(k) \frac{\partial a_0}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} C'(k) \frac{\partial k}{\partial \bar{z}} a_0 = 0 \quad (2.18)$$

この式は、また、 $\omega$  のように書き換えることもできる。

$$\frac{\partial a_0^2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (C a_0^2) = 0 \quad (2.19)$$

これは Whitham (1974 chap. 11) の wave action density 保存則に対応するものであるが、ここでは  $a_0$  および  $C$  が複素数である事に注意すべきである。

### 3. 中立曲線

複素波数  $k$  を支配する方程式 (2.12) の一般解を求めたため、ここでは、筆者 (伊藤 1978) によって導入された複素座標空間の概念を用いる。すなわち、空間座標  $\bar{z}$  を実軸とする複素空間

$$\bar{z} = \bar{z} + i\eta \quad (3.1)$$

を考へ、 $k$  がこの複素空間全域で定義できるものと仮定する。

これは  $k$  が  $\xi$  の解析関数であること期待していることになる。  
 ただし、 $\xi=0$  で表わされる実軸上における値  $k(\xi, \tau)$  だけが我々の目に見える物理空間内で実現される複素数を与え、それ以外の領域における  $k$  の値は物理現象と直接の関係は持たない。さて、 $\xi$  と  $\tau$  で書か換えることによって (2.12) は

$$\frac{\partial k}{\partial \xi} + C(k) \frac{\partial k}{\partial \tau} = 0 \quad (3.2)$$

に一般化される。いま、複素空間内で定義される特性曲線に沿った微分を考慮してやることによって、上式は等価な連立常微分方程式

$$\frac{dk}{d\xi} = C(k), \quad \frac{dk}{d\tau} = 0 \quad (3.3)$$

に書き換えることができる。この式は特性曲線に沿って  $k$  が一定であることを示し、したがって  $(\xi, \tau)$  平面上における特性基礎曲線も  $k$  の値に応じた一定の勾配を持つ直線になることが判る。いま、4次元空間  $(k_r, k_i, \xi, \tau)$  の中、ある点  $P$  を中心とする小さな閉曲面の内部にだけエネルギーが集中しているような初期条件を考えると、この閉曲面は時間の経過とともに、 $P$  点の座標から定まる一本の直線に沿って動く(図1参照)。この直線が平面  $\xi=0$  に平行でないなら、直線は一定のみ平面  $\xi=0$  と交わることになり、攪乱エネルギーを含む閉曲面がそこを通過する短い時間だけ物理空間中に攪乱が姿を表わし、それ以外の時刻には物理空間に攪乱が存在しないこ

とになる。このように物理空間内に攪乱を引続き発生させたい解は我々の現在の目的にとって興味がない。攪乱が常に物理空間中を伝播してゆく状態を表わす解と考えると、その特性曲線は平面  $\omega = 0$  に含まれていることが必要である。これは  $C(k)$  の虚数部が 0 になるという条件を付加することによってみだされる。

$$C_i(k_r, k_i) = 0 \quad (3.4)$$

この条件は  $k_r$  と  $k_i$  の間に一つの関係を設定するので、両者はお互いに勝手には選べないことになる。なお、Gaster (1968) は鞍部法を用いて (3.4) に等価な条件を導いている。

一般に固有値問題から定まる関係 (2.11) は 4 つの量  $\omega_r, \omega_i, k_r, k_i$  の間に 2 個の関係式を与えるにすぎない。したがってこれらの量のうちただ一つを独立量と見なし、他の三つをその函数として一意に決定するためには、もう一つの拘束条件が必要になる。従来の線型安定理論では、 $k$  または  $\omega$  のどちらか一方を実数に選ぶことによってはじめから拘束条件  $k_i = 0$  または  $\omega_i = 0$  を付加してきたが、このような条件を選ぶ必然性はいここにもない。ただ Gaster (1965) は、振動リボンのよって一定の振動数を持つ強制外力を継続的に加えてやっとなるとき生じる攪乱は、拘束条件  $\omega_i = 0$  をみだしていることを示した。しかし、もっと自然な状態が発生する攪乱に対しては、上に



与えた条件 (3.4) を満たすべきものと思われ。

条件 (3.4) のもとでは、群速度  $C(k)$  は実数値を取り、攪乱はこの速度で下流に伝播する。したがって、攪乱が増幅するか減衰するかを調べるには、位相函数  $\Theta(x, t)$  の虚数部が特性曲線に沿ってどのように変化するかを見ればよい。すなわち、

$$-\text{Im}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = -\text{Im}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} + C\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) = \Omega_i(k_r, k_i) - k_i C_r(k_r, k_i) \quad (3.5)$$

が正ならば増幅、負ならば減衰である。図2と図3には (3.4) のもとで中立安定のための条件

$$\Omega_i(k_r, k_i) - k_i C_r(k_r, k_i) = 0 \quad (3.6)$$

をみたす  $k_r$  および対応する  $\omega_r$  を Reynolds 数に対して描いた曲線すなわち中立曲線が与えられている。実線で示された曲線は従来の線型安定理論に基づく中立曲線であるが、新しい中立曲線はこれに比べて非常に細い形状を持つ実が目される。なお、一実線は最大増幅率を与える  $k_r$  と  $\omega_r$  を示したもので、この線上では  $k_i = 0$  になる。最大増幅率だけを計算するときには、従来の拘束条件  $k_i = 0$  を用いても同じ結果が得られる。これらの固有値の計算には筆者の数値計算法 (Itoh 1974) を用いた。

いま、 $R_c$  より大きい Reynolds 数  $R$  を考え、ある一実で発生した波束型攪乱が時間とともにどのように発達するかを見ることにする。攪乱は初期の段階ではほとんど全ての波数成分を含むが、十分下流に伝播した段階では図2に与えられた新し

い中立曲線の内部にある波数成分だけが生き残り、他の成分はちかて減衰してしまう。残された波数成分はそれぞれ自身自身に固有の一定な群速度で伝播するから、攪乱の占める空間領域は伝播距離に比例して広がり、図4の斜線部分のように表現される。波束の前縁は中立曲線の上分枝に対応する波数からなり、後縁は中立曲線下分枝上の波数成分を持つ。また、最大振幅を持つ波束中心部は図2の一実鎖線上の波数成分から成り立っていることも判る。以上の解析結果は Gaster & Grant (1975) が平板境界層について最近行った実験の結果に対して定性的な説明を与えているものと思われる。

#### 4. 振幅方程式

いま、攪乱の中のある波数成分に着目するとその成分の伝播の状況は(2.12)で支配され、その成分の持つ振幅は(2.18)を調べることで明らかになる。攪乱の発生点から十分下流では、最大増幅率を持つ波数成分が支配的になって波束の中心を形成するから、ここではその中心領域での振幅分布がどのような形状を持つかを調べてみる。Reynolds数を固定したとき最大増幅率を持つ波数を $k_0$ とし、それとの差が $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ の程度しか違わない波数成分だけが構成される領域を拡大して見るために

$$X = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi - C_0\tau), \quad T = \tau \quad (4.1)$$

なる座標変換を行う。ここで  $C_0$  は波数  $k_0$  の持つ群速度  $C(k_0)$  である。考えている波束中心付近では、波数と振動数は  $k_0$  および  $\Omega_0 = \Omega(k_0)$  に十分近く、固有函数も  $\phi_0(y; k_0)$  に十分近いから、攪乱の波数と流れ函数  $\psi$  のように展開してよい。

$$k = k_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} k_1(x, T) + O(\varepsilon) \quad (4.2)$$

$$\psi = e^{i(k_0 x - \Omega_0 t)} A(x, T) \phi_0(y; k_0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (4.3)$$

(4.3) を (2.3) (2.10) と比較すると  $Q_0$  と新しい振幅  $A$  の関係は

$$Q_0(\xi, \tau) = A(x, T) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\{k_0 \xi - \Omega_0 \tau - \Phi(\xi, \tau)\}\right] + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (4.4)$$

と書ける。(4.2) と (4.4) を (2.12) と (2.18) に代入して  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  の高次項を省略するとつぎの二式を得る。

$$\frac{\partial k_1}{\partial T} + C_0' k_1 \frac{\partial k_1}{\partial X} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial T} + C_0' k_1 \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial k_1}{\partial X} - i k_1^2 \right) C_0' A = 0 \quad (4.6)$$

(4.5) の解は

$$k_1 = \frac{X - X_0}{C_0' T} \quad (4.7)$$

これを (4.6) に代入して積分すると

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{T}} \exp\left\{i(X - X_0)^2 / (2C_0' T)\right\} \quad (4.8)$$

を得る。ここで、 $X_0$  は波束中心の座標、 $A_0/\sqrt{T}$  は中心波数  $k_0$  の成分が時刻  $T$  に持つ振幅である。ただし、中心波数  $k_0$  は実数であるが (4.3) にあたる  $\Omega_0$  は一般には複素数であるから、波数  $k_0$  の持つ実際の振幅は  $A_0/\sqrt{T}$  に  $\exp(\Omega_0 t)$  を乗じたものである。

いまとくに、 $R$  を限界 Reynolds 数  $R_c$  の近傍に選ぶ、その差

と  $R - R_c = \epsilon R_1$  と書けるとき,

$$k_0(R) = k_c + \epsilon R_1 \left( \frac{dk_0}{dR} \right)_c + O(\epsilon^2), \quad (4.9)$$

$$\Omega(k_0, R) = \Omega_c + \epsilon R_1 \left\{ C_c \left( \frac{dk_0}{dR} \right)_c + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_c \right\} + O(\epsilon^2) \quad (4.10)$$

より, (4.3) の指数項はつきのようになる。

$$\begin{aligned} k_0 x - \Omega_0 t &= (k_c x - \Omega_c t) + \epsilon R_1 \left\{ \left( \frac{dk_0}{dR} \right)_c (x - C_c t) - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_c t \right\} + O(\epsilon^2) \\ &= (k_c x - \Omega_c t) + R_1 \left\{ - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_c T + \epsilon^{\frac{1}{2}} \left( \frac{dk_0}{dR} \right)_c X \right\} + O(\epsilon^2) \quad (4.11) \end{aligned}$$

以上より, 実質的な振幅は  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  の最低次までの近似で

$$B(X, T) = \frac{A_0}{\sqrt{T}} \exp \left\{ \frac{i(X - X_0)^2}{2C_c T} - i \left( \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_c R_1 T \right\} \quad (4.12)$$

のように与えられる。これは非線型項を省略した Stewartson & Stuart (1971) の式

$$\frac{\partial B}{\partial T} - \frac{iC_c'}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} = -i \left( \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_c R_1 B \quad (4.13)$$

の解になっている。ここに与えた理論は一般に任意の Reynolds 数に対して成り立ち,  $\epsilon < 1$  に限界 Reynolds 数の近傍では Stewartson & Stuart の方程式をみたす解を与えることは非常に興味深い。

### 参考文献

Gaster, M. 1965 J. Fluid Mech. 22, 433.

Gaster, M. 1968 J. Fluid Mech. 32, 173

Gaster, M & Grant, I. 1975 Proc. R. Soc. Lond. A. 347, 253.

Itoh, N. 1974 Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 65

伊藤 1978 数理解析研講究録 326, 132.

Jordinson, R. 1970 *J. Fluid Mech.* 43, 801

Lin, C. C. 1955 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press

Schubauer, G. B. & Skramstad, H. K. 1947 NACA TR 909.

Shen, S. F. 1954 *J. Aero. Soc.* 21, 62.

Stewartson, K. & Stuart, J. T. 1971 *J. Fluid Mech.* 48, 529.

Whitham, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons.

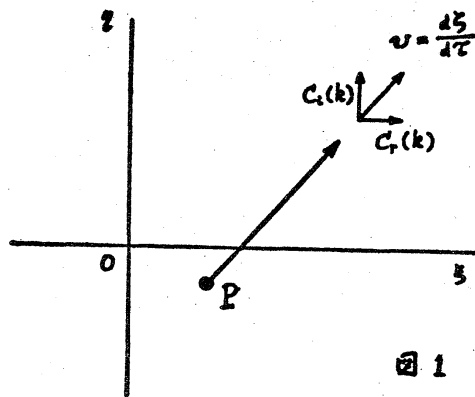


图 1

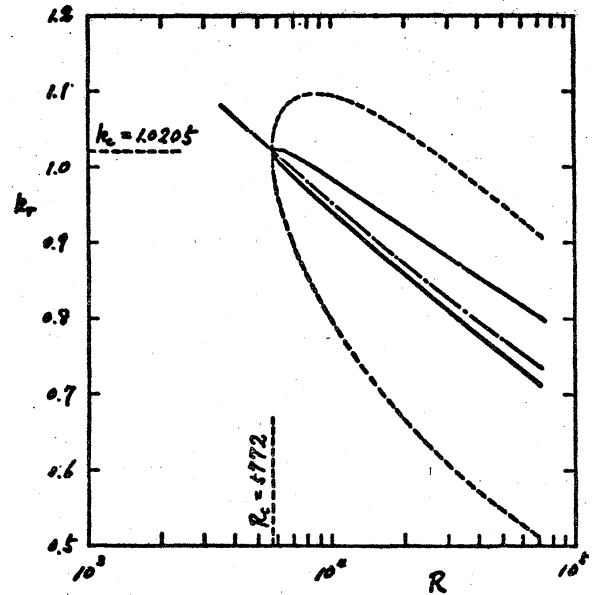


图 2

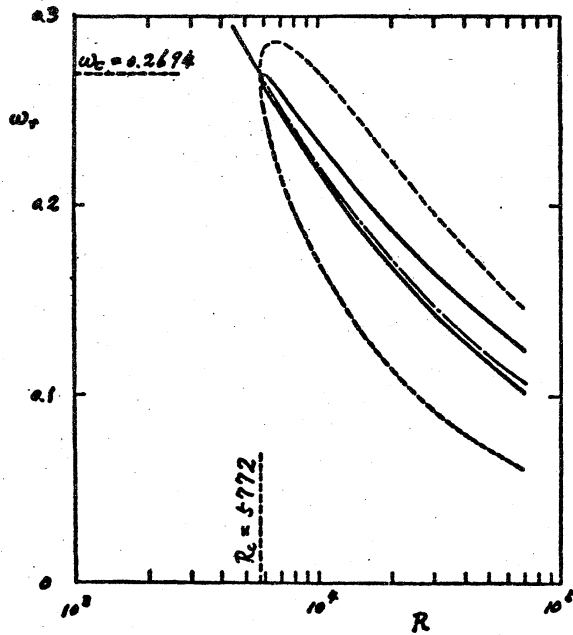


图 3

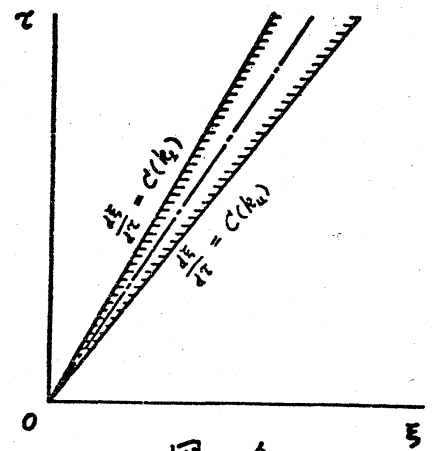


图 4