

振動壁上の薄い液層に生ずる波

慶大工 長谷川英治

1. はじめに

化学工業上重要な、壁面に沿って流れる液膜の流れは、必ずしも静かな雰囲気にはなく、種々の原因による振動源にさらされている場合が多い。こんなとき、装置内の重力下で流れる液膜に生ずる波立ちにおよぼす振動源の影響を、運動の非線形性を考慮して調べる。外部からの振動源の流れへの作用は液膜が流れる壁面の振動の形でとり入れることとし、その振動方向は、実際上多い、壁面に垂直方向であるとする。

ところで、時間に依存した流れの安定性の問題は、主に線形の範囲で、乱れの発現限界への外部からの振動の影響について色々行われている⁽¹⁾。扱われた問題は、境界の形が変わらない、一方向流れの場合と熱対流の場合とに集中している。前者の問題については、非線形性を考慮した解析も行われている。

⁽²⁾ ここでとりあげようとしている、自由表面をもつ液層の

安定性については、水平方向に振動する壁の上の粘性流体層の場合と、鉛直方向に振動する壁の上の完全流体層の場合と⁽³⁾⁽⁴⁾について、Mathieu 型の安定性の解析が行われている。ここでは、壁が面に垂直方向に振動する場合の薄い液層の波立ちについて調べる。

2. 基礎の方程式系

傾斜角 θ の平らな壁面上を平均深さ H で、密度 ρ 、動粘性係数 ν の縮まない粘性流体が、重力加速度 g の作用の下に、自由表面での速度 $U = gH^2 \sin \theta / 2\nu$ で定常的に流れているものとする。このとき、壁が面に垂直方向に時間 t に依存した速度 V で振動運動をしているものとする。いま、振動壁と共に動く座標系をとり、壁に沿って流れの方向に x 軸、壁に垂直に壁より液体層へと y 軸をとる。流れの周数 ω を導入すれば、この場合の運動の方程式とそれに対する境界条件とは

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} = \mu R & \left[\psi_{yyt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xyy} - (\bar{\psi}_{yyy} + \psi_{yyy}) \psi_x \right] \\ & - 2\mu^2 \psi_{xxyy} \\ & + \mu^3 R \left[\psi_{xxt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xyy} \right] \\ & - \mu^4 \psi_{xxxx}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$y = 0: \quad \psi_x = \psi_y = 0 \quad (2)$$

$$y = h : - \frac{\mu^2 W \operatorname{cosec} \theta h_{xx}}{(1 + \mu^2 h_x^2)^{3/2}} + \left(\cot \theta + \frac{F}{\sin \theta} \right) (h-1) \\ - p - \mu \psi_{xy} \frac{1 - \mu^2 h_x^2}{1 + \mu^2 h_x^2} - 4\mu^3 \frac{h_x^2 \psi_{xy}}{1 - \mu^2 h_x^2} = 0 \quad (3)$$

$$(\bar{\Psi}_{yy} + \psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx}) (1 - \mu^2 h_x^2) - 4\mu^2 h_x \psi_{xy} = 0 \quad (4)$$

$$h_t + (\bar{\Psi}_y + \psi_y) h_x + \psi_x = 0 \quad (5)$$

となる。ここで、 x は発生する波の代表波長 L で、 y は H で、 t は L/σ で、 ψ は $H\sigma$ で、圧力 p は $\rho g H \sin \theta$ で、液層の厚さ h は H で各々標準化し、 σ を表面張力係数として、

$$R = H\sigma/\nu, \quad \mu = H/L, \quad F = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt}, \quad W = \frac{\sigma}{\rho g H^2} \quad (6)$$

なる無次元量を導入した。なお、 $\bar{\Psi}$ は乱れのない場合の流れの関数

$$\bar{\Psi} = y^2 - \frac{1}{3} y^3 \quad (7)$$

である。これらの式は、自由表面上の法線方向の力の釣り合いの式 (3) に壁の運動による加速度項が加えられたこと以外、静止した壁面の流れの場合と全く同じである。圧力 p は

$$p_x = \frac{1}{2\mu} \psi_{yyy} - \frac{R}{2} \left\{ \psi_{ty} + (\bar{\Psi}_y + \psi_y) \psi_{xy} \right.$$

$$-(\Psi_{yy} + \psi_{yy}) \psi_x \} + \frac{1}{2} \mu \psi_{xxy} \quad (8)$$

により与えられる。

式(1)~(8)で、Benney の行、 ψ 流れ周数 ψ の浅水ボラメータ μ についての展開を用い、⁽⁶⁾ Gjevik に従って表面張力による影響は大きいとし、ウェバー数 W を含む項を残して、⁽⁷⁾ μ について一次までの正しさで、液層の厚さ h についての式を導けば、

$$h_t + \left[\frac{2}{3} h^3 + \mu \left\{ -\frac{2}{3} h^3 (\cot \theta + \frac{F}{\sin \theta}) + \frac{8}{15} R h^6 \right\} h_x + \frac{2}{3} \mu^3 W \operatorname{cosec} \theta h^3 h_{xxx} \right]_x = 0 \quad (9)$$

となる。この方程式はその係数が F を通じて時間 t に依存する。

3. 解法

ここでは、種々の波の間の相互作用を考慮することなしに、初期に、唯一種類の線形理論に従う波

$$t=0 : h = 1 + \varepsilon \cos(x + \omega t) \quad (10)$$

があったものとし、その後のこの波の時間発展の様子を調べる。静止している壁面を流れる液層の流れの非線形安定論を行う際、Nakaya が用いた振巾展開法⁽⁸⁾を、その展開係数に

時間依存性を許して、そのまま用いることにする。すなわち、

$$\begin{aligned}
 h(t, x) = & 1 + A(t) h_1(t) \cos \varphi \\
 & + A^2(t) \{ h_2(t) e^{2i\varphi} + h_2^*(t) e^{-2i\varphi} \} \\
 & + A^3(t) \{ h_3(t) e^{3i\varphi} + h_3^*(t) e^{-3i\varphi} \} \\
 & + \dots \dots \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$A_t(t) = s_0 A - s_2(t) A^3 + \dots \quad (12)$$

$$\varphi_x = 1, \quad \varphi_t = \omega_1 + \omega_3(t) A^2 + \dots \quad (13)$$

のように展開する。ここで、*印は複素共役を示す。以下では式(11)~(13)を h の式(9)に代入し、展開係数 $h_1, h_2, h_3, s_0, s_2, \omega_1, \omega_3$ を決定し、さらに、 A を決定する式を求め、それを初期条件(10)に合うように定める。

4. 解

A についての一次の方程式より

$$s_0 = \frac{2}{3} \mu \left(\frac{4}{5} R - \cot \theta - \mu^2 W \operatorname{cosec} \theta \right), \quad (14)$$

$$\omega_1 = -2, \quad (15)$$

$$h_1 = e^{-\frac{2\mu}{3 \sin \theta} \int_0^t F(\xi) d\xi} \quad (16)$$

を得る。A について = 次の方程式より、初期条件を考慮して、

$$h_2 = \frac{1}{I_2(t)} \int_0^t \left\{ -i + 3S_0 + \mu \cot \theta + \mu^3 W \operatorname{cosec} \theta - \frac{\mu}{\sin \theta} F(\xi) \right\} h_1^2 \times I_2(\xi) d\xi \quad (17)$$

となる。こゝで、

$$I_2(t) = e^{(-2S_0 + 8\mu^3 W \operatorname{cosec} \theta)t + \frac{8\mu}{3\sin \theta} \int_0^t F(\xi) d\xi} \quad (18)$$

である。A について = 次の方程式より、

$$S_2 = -4h_{2i} + \mu \left\{ -R \left(\frac{16}{5} h_{2r} + 2h_1^2 \right) + \left(\cot \theta + \frac{F}{\sin \theta} \right) \left(2h_{2r} + \frac{h_1^2}{2} \right) + \mu^2 W \operatorname{cosec} \theta \left(14h_{2r} + \frac{h_1^2}{2} \right) \right\} \quad (19)$$

$$w_3 = -4h_{2r} - \frac{h_1^2}{2} - \mu \left\{ 2 \left(\cot \theta + \frac{F}{\sin \theta} \right) - \frac{16}{5} R + 14\mu^2 W \operatorname{cosec} \theta \right\} h_{2i} \quad (20)$$

$$h_3 = \frac{1}{I_3(t)} \int_0^t \left\{ \left(-6i + 27S_0 + 9\mu \cot \theta - 9\mu^3 W \operatorname{cosec} \theta - \frac{9\mu}{\sin \theta} F \right) h_1 h_2 + \left(-\frac{i}{4} + \frac{45}{8} S_0 + 3\mu \cot \theta + 3\mu^3 W \operatorname{cosec} \theta - \frac{3\mu}{4\sin \theta} F \right) h_1^3 \right\} \times I_3(\xi) d\xi \quad (21)$$

となる。こゝで、

$$h_2 = h_{2r} + i h_{2i} \quad (22)$$

$$I_3(t) = e^{(-6S_0 + 48\mu^3 W \operatorname{cosec} \theta)t + \frac{6\mu}{\sin \theta} \int_0^t F(\xi) d\xi} \quad (23)$$

である。

5. 考察および結論

基本波 $\cos \varphi$ の振幅 ($A h_1$) を決定する方程式は

$$\frac{d(A h_1)}{dt} = A_t h_1 + A_1 h_1 t$$

の右辺に、解 (12), (14), (16), (19) を代入して、

$$\frac{d(A h_1)}{dt} = \left(s_0 - \frac{2\mu}{3 \sin \theta} F \right) (A h_1) - \frac{s_2}{h_1^2} (A h_1)^3 \quad (24)$$

となる。式 (24) の右辺第一項の係数は、線形の範囲での基本波の成長率を与えるものであり、 F の正負に従って、流れは安定化、または、不安定化される。いま、壁が正弦波的に振動し、 F が鉛直

$$F = \delta \cos \Omega t$$

で与えられるとき、その係数は、

$$s_0 - \frac{2\mu}{3} F = \frac{2}{3} \mu \left(\frac{4}{5} R - \mu^2 T \frac{1}{R^{2/3}} - \delta \cos \Omega t \right)$$

と書き換えられる。ここで、 $W = T/R^{2/3}$, $T = (\sigma^3 / 4\rho^3 g v^4)^{1/3}$ とした。したがって、もし、壁の振動の振幅 δ が与えられたものとするならば、 $R-\mu$ 面内で、

$$\frac{4}{5} R - \mu^2 T \frac{1}{R^{2/3}} = \delta \quad (25)$$

により指定された曲線の上側では、波の振幅の変化は時間的

に増減を繰り返し、下側では、その変化は時間的に単調となる。その限界線をもとに壁の振巾に対して示したのが図-1である。図中 $\delta = 0$ は静止壁の線形中立曲線に相当する。

次に、基本波の振巾の式(24)は、初期条件(10)の下に、

$$(A h_1)^2 = \frac{1}{J(t) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + 2 \int_0^t \frac{s_2}{h_1^2} J(\xi) d\xi \right)} \quad (26)$$

のように積分される。ここで、

$$J(t) = e^{2s_0 t} - \frac{4\mu}{3 \sin \theta} \int_0^t F(\xi) d\xi \quad (27)$$

である。この式に式(14), (16), (19)を代入すれば、任意の時刻の基本波の振巾が求められる。いま、線形的に不安定領域内で、前の例と同様、正弦的に振動する壁の場合を考之れば、途中の波の振巾は、前述のように、壁の振巾 δ の大きさにより、一通りに変化するが、式(26)で十分時間が経ったときの解を求めると、

$$(A h_1)_e^2 = \mu \left(\frac{8}{15} R - \frac{2}{3} \cot \theta - \frac{2}{3} \mu^2 W \operatorname{cosec} \theta \right) \\ \times \left(-\frac{4}{15} R + \frac{1}{3} \cot \theta + \frac{7}{3} \mu^2 W \operatorname{cosec} \theta \right) \quad (28)$$

となり、壁の振動と係りのない一定値となる。この値は、静止壁の場合の平衡振巾の値と一致する。⁽⁸⁾したがって、壁の振動は、波の成長過程にのみ関与するのみで、最終状態には何人の

影響をもたないこととなる。

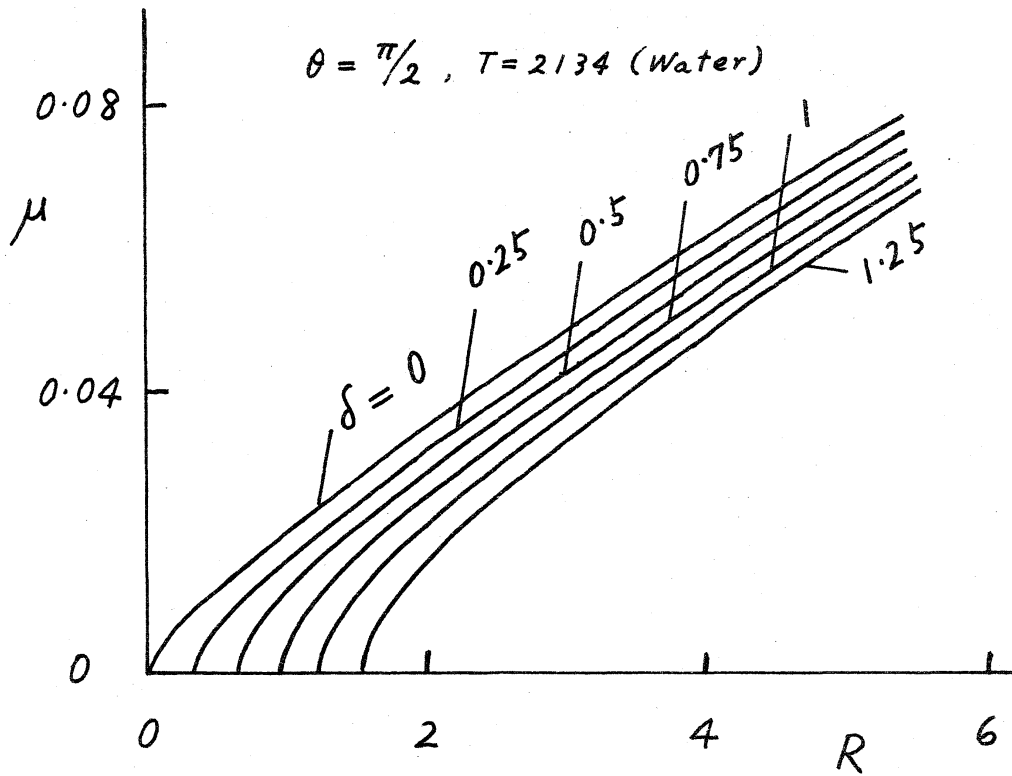


図 - 1

文献

- (1) S. H. Davis, *Annual Review of Fluid Mechanics*,
Vol. 8 (1976), 57.
- (2) K. Gotoh, *J. Phys. Soc. Japan*, 38 (1975), 882.
- (3) C-S. Yih, *J. Fluid Mech.*, 31 (1968), 737.
- (4) C-H. Li, *Phys. Fluid*, 13 (1970), 1121.
- (5) T. B. Benjamin and F. Ursell, *Proc. Roy. Soc. London*,
Ser. A, 225 (1954), 505.

- (6) D. J. Benney, *J. Math. Phys.*, 45 (1966), 150.
- (7) B. Gjevik, *Phys. Fluid*, 13 (1970), 1918.
- (8) C. Nakaya, *Phys. Fluid*, 18 (1975), 1407.