数理解析研究所講究録
第354巻 1979年 50-61

Burgers乱流の調和振動子型Green関数による取扱い

東邦大医　　中内紀彦

Fourier空間におけるBurgers方程式を時間微分することにより，エネルギーと波数の2乗に比例した復元力を持つ調和振動子型Langevin方程式に類似の式が導びかれる。この式を用いBurgers乱流のエネルギースペクトルを計算した。

§1. 基礎方程式の導出

空間の周期性を仮定し，流れの速度 $u(x,t)$ をFourier展開，

$$u(x,t)=\sum_k u(k,t)\,e^{ikx} \tag{1}$$

すると，Burgers方程式はFourier空間で，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)u(k,t)=-\frac{i}{2}k\sum_s u(s,t)\,u(k-s,t) \tag{2}$$

$$u^*(k,t)=u(-k,t) \tag{3}$$

とかける。波数は空間周期の大きさによって許されるすべての値をとる。Fourier成分を波数によって番号づけられた粒

子の集合とみなすとき，(2)式は周囲粒子の作用の下でのk成分粒子の運動を記述するものと考えられる。すなわち，乱流運動において(2)式は周囲粒子による撹動力を右辺にもつLangevin方程式のように考えられる。(Kraichnanらは(2)式を少し変形したモデルLangevin方程式を使うことによって，DIA方程式などが導びけることを示している[1]。彼らは結果からLangevin方程式を逆に構成しているのであり，そのLangevin方程式の意味は明確ではない。)

水溶液中の微粒子のBrown運動では，微粒子の質量が水分子の質量に比べはるかに大きいため水分子による撹動力をwhite noiseと考えることが良い結果を与えるが，乱流運動ではある波数成分の運動に作用する撹動力がどのような確率法則に従うのか全く不明である。一つの考え方として，注目する波数成分粒子に撹動力を及ぼしている周囲粒子の運動を考慮してみるのが自然であろう。そのために，(2)式を時間微分した式，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu k^2\right)u(k,t)=-\frac{i}{2}k\sum_{s}\left[\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\cdot u(k-s,t)+u(s,t)\frac{\partial u(k-s,t)}{\partial t}\right] \quad (4)$$

を考えてみる。(4)式右辺の時間微分された部分は，波数sと$k-s$に対する式((2)式でkのかわりに各々，sおよび$k-s$でおきかえた式)を用い，時間微分を消去することができ，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu k^2\frac{\partial}{\partial t}\right)u(k,t)=i\nu k\sum_s s^2 u(s)u(k-s)-\frac{k}{2}\sum_s\sum_l\left(k-\frac{s+l}{2}\right)u(s)u(l)u(k-s-l) \quad (5)$$

と書き換えられる。この式の右辺には波数 k の成分 $u(k,t)$ に比例する項が含まれているが，それを分離し

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu k^2\frac{\partial}{\partial t}+k^2 E(t)\right]u(k,t)=kF(k,t) \quad (6)$$

と書く。ただし，

$$E(t)\equiv\sum u^*(k,t)\,u(k,t) \quad (7)$$

$$F(k,t)\equiv i\nu k\sum_{s\neq k} s^2 u(s,t)u(k-s,t)-\frac{k}{2}\sum_s\sum_l{}_{s\neq k,\, l\neq k,\, s+l\neq 0}\left(k-\frac{s+l}{2}\right)u(s,t)u(l,t)u(k-s-l,t) \quad (8)$$

とおいた。

$E(t)$ は流れのエネルギーであり，$kF(k,t)$ は波数 k 以外の成分が k 成分に及ぼす力である。$u(k,t)$ に比例する項は $u(k,t)$ からみて一つの秩序運動を表わし，それ以外の成分からなる項は散乱効果を持つ無秩序運動を表わすと考えられよう。すなわち，(6) 式はエネルギーと波数の2乗に比例する復元力を持った調和振動子型 Langevin 方程式のように考えられる。[2),3)]

空間周期を L とするとき，$L\to\infty$ の場合にも $u(k,t)$ に比例する項を和の中から取り出し，分離して考えることが意味を持つであろうか。数学的には無限小の寄与しかしないように思われる。我々が考察しようとする一様な空間（統計的な意味における一様性）は，無限に広がった空間を想定すること

によってのみ可能であるが，現実の問題としてはそれを$L\to\infty$の極限として捉えるよりは，有限の周期性を持つ空間として積極的に捉えることができないであろうか。このことは，$L\to\infty$の極限としてみた場合，あるバンド内に含れる波数成分の運動は独立でなく，完全に同じ運動方程式に従うと考えることでもある。

§2. (6)式の形式解

上に導びいた(6)式を基礎にして，エネルギースペクトルのような乱流に関する統計量を計算したいわけであるが，一つの試みとしてGreen関数を用い，(6)式を形式的に解くことから始めよう。2階の微分方程式，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu k^2\frac{\partial}{\partial t}+k^2E(t)\right]y(k,t)=0 \tag{9}$$

を満たす関数を用い，次の2条件，

$$G(k;t,\xi)\Big|_{\xi=t}=0 \tag{10}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}G(k;t,\xi)\right]_{\xi=t}=1 \tag{11}$$

を満足するように構成された関数を使うと，$u(k,t)$は(6)式から，

$$u(k,t)=A(k,t)+k\int_0^t G(k;t,\xi)\bar{F}(k,\xi)d\xi \tag{12}$$

のように得られる。$A(k,t)$ は (9) 式の一般解であり，積分定数として，$u(k,t)$ および $\partial u(k,t)/\partial t$ の初期値を含む関数である。

§3. エネルギースペクトル

エネルギースペクトルは，(12)を使い，

$$\begin{aligned}\langle u^*(k,t)u(k,t)\rangle &= \langle A^*(k,t)A(k,t)\rangle \\ &+ k\int_0^t\left[\langle A^*(k,t)G(k;t,\xi)F(k,\xi)\rangle + \mathrm{c.c.}\right]d\xi \\ &+ k^2\int_0^t\int_0^t\langle G^*(k;t,\xi')G(k;t,\xi'')F^*(k,\xi')F(k,\xi'')\rangle d\xi' d\xi'' \qquad (13)\end{aligned}$$

のように表わされる。$\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均を意味し，c.c. は前項の複素共役をとることを意味する。閉じた形の積分方程式を得るために以下いくつかの仮定をする。

(i) Green 関数が満たす (9) 式の係数を平均値で置き換える。すなわち，以後 $E(t)$ は平均値，

$$E(t) = \sum_k \langle u^*(k,t)u(k,t)\rangle \qquad (14)$$

を意味するものとする。エネルギー $E(t)$ は流れのレイノルズ数無限大の極限で時間に依らぬ定数であることを考えると，レイノルズ数の大きい流れでは時間依存性を持つ他の確率変数との相関は小さいことが予想される。この仮定の下でグリーン関数 $G(k;t,\xi)$ は平均記号の外に出すことができ，

$$\begin{aligned}\langle u^*(k,t)u(k,t)\rangle &= \langle A^*(k,t)A(k,t)\rangle \\ &+ k\int_0^t\left[G(k;t,\xi)\langle A^*(k,t)F(k,\xi)\rangle + \mathrm{c.c.}\right]d\xi\end{aligned}$$

$$+k^2\int_0^t\int_0^t G^*(k;t,\xi')G(k;t,\xi'')\langle F^*(k,\xi')F(k,\xi'')\rangle d\xi' d\xi'' \tag{15}$$

とかける。こゝで，

$$\langle F^*(k,\xi')F(k,\xi'')\rangle \equiv \nu^2 \sum_{\substack{s \\ s\neq k}} \sum_{\substack{l \\ l\neq k}} s^2 l^2 \langle u^*(s,\xi')u^*(k-s,\xi')u(l,\xi'')u(k-l,\xi'')\rangle$$

$$+\frac{i}{2}\nu \sum_{s}\sum_{p}\sum_{q}{}_{\substack{s,p,q\neq k,\ s+l\neq 0}} s^2\left(k-\frac{s+l}{2}\right)\left[\langle u^*(s,\xi')u^*(k-s,\xi')u(p,\xi'')u(q,\xi'')u(k-p-q,\xi'')\rangle\right]-\mathrm{c.c.}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{s}\sum_{l}\sum_{p}\sum_{q}{}_{\substack{s,l,p,q\neq k,\ s+l,\ p+q\neq 0}}\left(k-\frac{s+l}{2}\right)\left(k-\frac{p+q}{2}\right)\langle u^*(s,\xi')u^*(l,\xi')u^*(k-s-l,\xi')u(p,\xi'')u(q,\xi'')u(k-p-q,\xi'')\rangle \tag{16}$$

である。

(ii) 調和振動子近似　エネルギーが保存するのはレイノルズ数無限大の場合であるが，大きなレイノルズ数に対して $E(t)$ の変化は小さいであろう。$E(t)$ が定数の場合（9）式は簡単に解け，その一般解 $A(k,t)$ および Green 関数 $G(k,t,\xi)$ は，

$$A(k,t)=a_1 e^{\mu_1 t}+a_2 e^{\mu_2 t} \tag{17}$$

$$G(k,t,\xi)=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[e^{\mu_1(t-\xi)}-e^{\mu_2(t-\xi)}\right] \tag{18}$$

で与えられる。ただし，

$$\mu_{1,2}\equiv\frac{1}{2}\left(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4E(t)k^2}\right) \qquad \beta\equiv\nu k^2 \tag{19}$$

である。積分定数 a_1，a_2 は $u(k,t)$ および $\partial u(k,t)/\partial t$ の初期値を用い；

$$a_1=\frac{-1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_2 u(k,0)-\partial u(k,0)/\partial t\right] \tag{20}$$

$$a_2=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_1 u(k,0)-\partial u(k,0)/\partial t\right] \tag{21}$$

と表わされる。(18) 式の $G(k;t,\xi)$ が (9)〜(11) 式を満たすこと

は容易に確められる。

簡単化のためにさらに大きな仮定を2つする。

(iii) 異る時刻間の相関を無視する。この仮定により，(15)式の右辺第2項は除かれる。第3項の時間積分はひとつおちる。

(iv) 5次の速度相関を無視し，偶数次の相関を2次の相関で表わす。

これらの仮定により，エネルギースペクトルを表わす(15)式は閉じた積分方程式，

$$\langle u^*(k,t)\,u(k,t)\rangle = \langle a_1^* a_1\rangle e^{(\mu_1^*+\mu_1)t} + \langle a_2^* a_2\rangle e^{(\mu_2^*+\mu_2)t} + \left[\langle a_1^* a_2\rangle e^{(\mu_1^*+\mu_2)t} + \mathrm{c.c.}\right]$$

$$+ \frac{k^2\theta(t)}{|\mu_1-\mu_2|^2}\int_0^t \left\{ e^{(\mu_1^*+\mu_1)(t-\xi)} + e^{(\mu_2^*+\mu_2)(t-\xi)} - \left[e^{(\mu_1^*+\mu_2)(t-\xi)} + \mathrm{C.C.}\right]\right\}\langle F^*F(k,\xi)\rangle d\xi \quad (22)$$

になる。$\theta(t)$ は時間の次元を持つ恒等的に1を表わす関数である。こゝで，

$$\langle F^*F(k,\xi)\rangle \equiv \nu^2 \sum_{s\neq k} s^2\left[s^2+(k-s)^2\right]\langle u^*(s,\xi)u(s,\xi)\rangle\langle u^*(k-s,\xi)u(k-s,\xi)\rangle$$

$$+ k\sum_{l,s\neq k}\sum_{l+s\neq 0}\left(k-\frac{s+l}{2}\right)\langle u^*(l,\xi)u(l,\xi)\rangle\langle u^*(s,\xi)u(s,\xi)\rangle\langle u^*(k-s-l,\xi)u(k-s-l,\xi)\rangle \quad (23)$$

$$\langle a_1^* a_1\rangle \equiv \frac{1}{|\mu_1-\mu_2|^2}\left\{\langle a^*a\rangle + \mu_2^*\mu_2\langle u^*u\rangle - \left[\mu_2\langle a^*u\rangle + \mathrm{c.c.}\right]\right\} \quad (24)$$

$$\langle a_2^* a_2\rangle \equiv \frac{1}{|\mu_1-\mu_2|^2}\left\{\langle a^*a\rangle + \mu_1^*\mu_1\langle u^*u\rangle - \left[\mu_1\langle a^*u\rangle + \mathrm{c.c.}\right]\right\} \quad (25)$$

$$\langle a_1^* a_2\rangle \equiv \frac{-1}{|\mu_1-\mu_2|^2}\left\{\langle a^*a\rangle + \mu_1\mu_2\langle u^*u\rangle - \mu_1\langle a^*u\rangle - \mu_2\langle a u^*\rangle\right\} \quad (26)$$

ただし，$a \equiv \left.\dfrac{\partial u(k,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$ ，　$u \equiv u(k,0)$ (27)

とおいた。

A. $|k|<2\sqrt{E(t)}/\nu$: この領域で，$\mu_{1,2}$ は複素数になりエネルギースペクトルは，

$$\langle u^*(k,t)u(k,t)\rangle = e^{-\beta t}\left\{\langle a_1^*a_1\rangle+\langle a_2^*a_2\rangle+[\langle a_1^*a_2\rangle e^{-i\omega t}+\text{c.c.}]\right\}$$
$$+\frac{2k^2\theta(t)}{\omega^2}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}[1-\cos\omega(t-s)]\langle \bar{H}^*\bar{H}(k,s)\rangle ds \qquad (28)$$

$$\langle a_1^*a_1\rangle\equiv\frac{1}{\omega^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta^2+\omega^2)\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}[(\beta+i\omega)\langle a^*u\rangle+\text{c.c.}]\right\} \qquad (29)$$

$$\langle a_2^*a_2\rangle\equiv\frac{1}{\omega^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta^2+\omega^2)\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}[(\beta-i\omega)\langle a^*u\rangle+\text{c.c.}]\right\} \qquad (30)$$

$$\langle a_1^*a_2\rangle\equiv\frac{-1}{\omega^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta-i\omega)^2\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}(\beta-i\omega)[\langle a^*u\rangle+\text{c.c.}]\right\} \qquad (31)$$

$$\omega\equiv\sqrt{4E(t)k^2-\beta^2} \qquad (32)$$

となり振動的性格を示している。

B. $|k|>2\sqrt{E(t)}/\nu$; この領域で，$\mu_{1,2}$ は実数であり，エネルギースペクトルは，

$$\langle u^*(k,t)u(k,t)\rangle = e^{-\beta t}\left\{\langle a_1^*a_1\rangle e^{\lambda t}+\langle a_2^*a_2\rangle e^{-\lambda t}+[\langle a_1^*a_2\rangle+\text{c.c.}]\right\}$$
$$+\frac{2k^2\theta(t)}{\lambda^2}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}[\cosh\lambda(t-s)-1]\langle \bar{H}^*\bar{H}(k,s)\rangle ds \qquad (33)$$

$$\langle a_1^*a_1\rangle\equiv\frac{1}{\lambda^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta+\lambda)^2\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}(\beta+\lambda)[\langle a^*u\rangle+\text{c.c.}]\right\} \qquad (34)$$

$$\langle a_2^*a_2\rangle\equiv\frac{1}{\lambda^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta-\lambda)^2\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}(\beta-\lambda)[\langle a^*u\rangle+\text{c.c.}]\right\} \qquad (35)$$

$$\langle a_1^*a_2\rangle\equiv\frac{-1}{\lambda^2}\left\{\langle a^*a\rangle+\frac{1}{4}(\beta^2-\lambda^2)\langle u^*u\rangle+\frac{1}{2}(\beta-\lambda)\langle a^*u\rangle+\frac{1}{2}(\beta+\lambda)\langle a u^*\rangle\right\} \qquad (36)$$

$$\lambda\equiv\sqrt{\beta^2-4E(t)k^2} \qquad (37)$$

と書き表わせる。これは粘性効果の無視しえない領域であり，振動的性格は表われていない。

§4. 数値計算

(28)式および(33)式は，全く同じ連立微分方程式，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)U(k,t)=G(k,t) \tag{38}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)G(k,t)=H(k,t) \tag{39}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)H(k,t)=\left(\beta^2-4E(t)k^2\right)G(k,t)+2k^2\theta(t)\langle \overline{F}^*\overline{F}(k,t)\rangle \tag{40}$$

の型に書くことができる。ただし，

$$U(k,t)\equiv\langle u^*(k,t)\,u(k,t)\rangle \tag{41}$$

と置いた。初期条件は，

$$U(k,0)=\langle u^*u\rangle \tag{42}$$

$$G(k,0)=\beta\langle u^*u\rangle+[\langle a^*u\rangle+c.c.] \tag{43}$$

$$H(k,0)=2\langle a^*a\rangle+(\beta^2-2E(0)k^2)\langle u^*u\rangle+\beta[\langle a^*u\rangle+c.c.] \tag{44}$$

で与えられる。エネルギースペクトルの数値計算はこの連立微分方程式を差分法で行った。$E(t)$はこれまで時間に依らぬ定数として扱ってきたが，数値計算ではその時刻において求められたエネルギースペクトルを使って計算したものを用いた。

初期値をGaussianに仮定すると，もとのBurgers方程式からわかるように，

$$\langle a^*u\rangle=-\beta U(k,0) \tag{45}$$

$$\langle a^*a\rangle=\beta^2U(k,0)+\frac{k^2}{2}\sum_s U(s,0)\,U(k-s,0) \tag{46}$$

でなければならない。こゝでは，エネルギースペクトルの初期値として，

$$U(k,0) = A k^4 e^{-k^2/a^2} \qquad (17)$$

の型のものについて計算を行っている。流れのレイノルズ数は，

$$R = \frac{\sqrt{E(0)}}{\nu a} \qquad (18)$$

で定義してある。

§5. おわりに

数値計算は，諸般の事情により，現在のところ比較的小さなレイノルズ数の場合にしか行なわれていない。この計算結果をみると，エネルギースペクトルの山の頂上の右肩にできた凹みが，時間の経過とともに深くなっている。これは，準正規理論と良く似ている。こゝで考察してきた理論は本来大きなレイノルズ数の場合にあてはまるものであり，この数値計算の結果を厳密に評価することはできないが，(16)式右辺第2項の5次の相関を完全に無視していることは楽観的に過ぎるかもしれない。(レイノルズ数無限大の極限では，$\nu \to 0$ であるからこの項は落ちるが.)

もう一つの大きな問題は，エネルギースペクトル方程式を，通常の型，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\beta\right)U(k,t)=T(k,t)$$

と書いたとき，$T(k,t)$ をすべての波数 k にわたって加えたら0になるという保証が無いことである。奇数次の相関を考慮することによって，この条件を満たすようにすることができるかもしれない。

ここに考察した事から低い波数領域でエネルギースペクトルが振動的性格を持つように思われる。又、この理論では，2階微分を含む式を扱うため本質的に非マルコフ過程である。しかし，乱流はマルコフ的側面を持つことも確かであるからマルコフ化が可能な条件とは何かを考察することも，重要な問題であろう[4]。

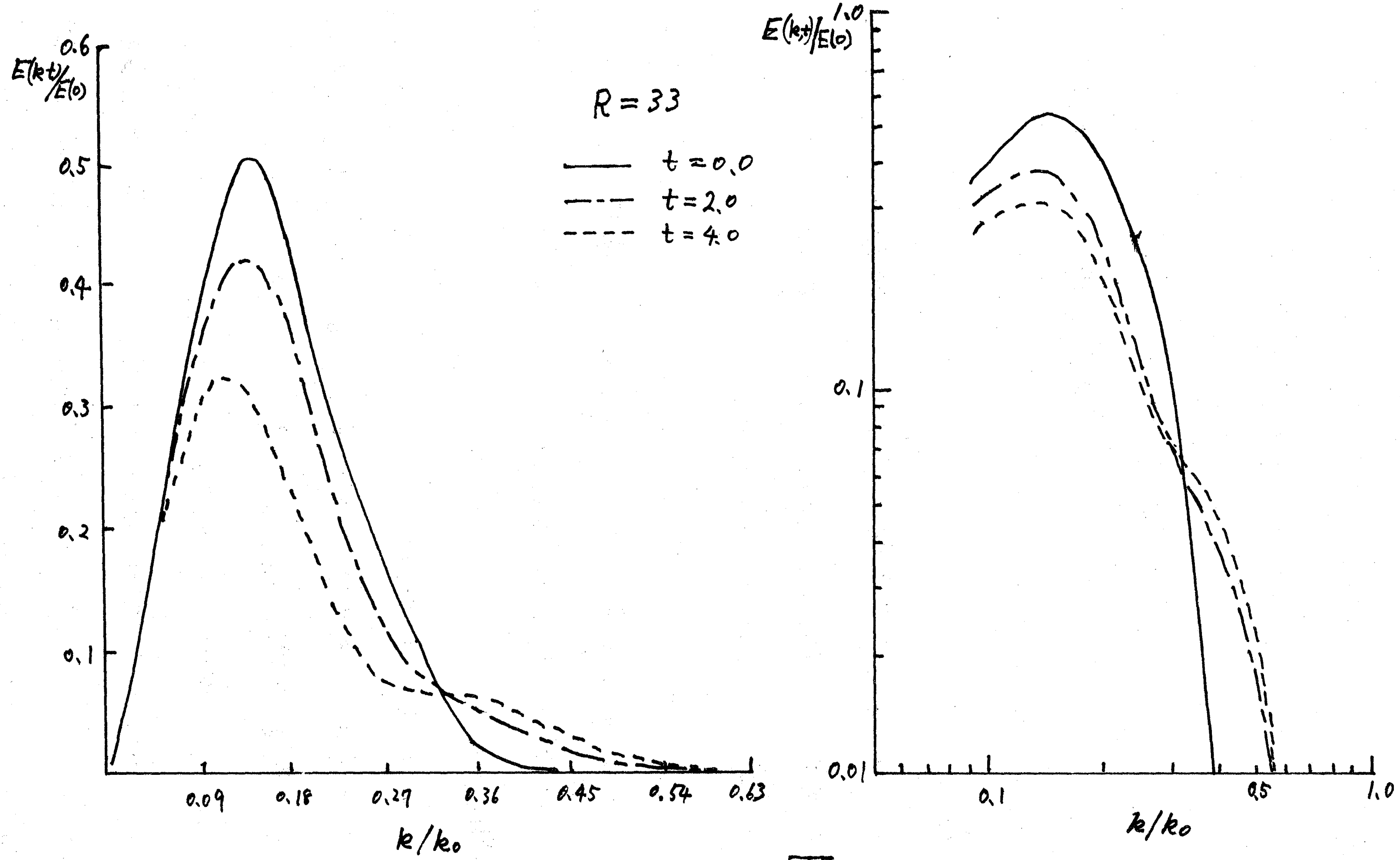
参考文献

(1). J. R. Herring and R. H. Kraichnan ; Lecture Note in Physics Vol. 12, "Statistical Model and Turbulence" ed. J. Ehleres, etc.; Springer-Verlag (1975)

(2). 堀 淳一 : "ランジュバン方程式" 岩波 (1977)

(3). K. Wada and J. Hori ; Progr. Theor. Phys. 49 129 (1973)

(4). S. A. Orszag ; Lectures on the Statistical Theory of Turbulence. "Fluid Dynamics", Gordon and Breach Science Pub. (1975)



$k_0 \equiv \frac{2\sqrt{E(0)}}{\nu}$