数理解析研究所講究録
第 354 巻 1979 年 239-251

変関数の変換により Hopf 方程式から導かれる乱流近似理論

都立大　理学部　冨山泰伸

§1 序

Hopf 方程式は乱流の統計的基礎をなす方程式として優れてはいるがこれを解く一般的・数学的手段は確立していない。これを解く試みは Hopf, Rosen, Tatarski 等によって行われているが，エネルギー・スペクトルなどの興味ある物理量を求めるとか，乱流の構造の解明に用いるところまでには至っていない。

この小論の中では Burgers 乱流を対象とするので，その Hopf 方程式を書き下しておこう。Burgers 流体の方程式を速度場の Fourier 成分について示そう。

$$\frac{\partial v(k)}{\partial t} + i\frac{k}{2}\iint v(k')v(k'')\delta(k-k'-k'')dk'dk'' = -\nu k^2 v(k) \qquad (1.1)$$

Burgers 乱流場の特性汎関数は次式で定義される。

$$\Phi[z(k):t] \equiv \langle e^{i\int v^*(k,t)z(k)dk} \rangle_c \quad (\text{初期平均の意味}) \qquad (1.2)$$

$\phi[Z(k),t]$ に対する条件は以下のように示される。

イ) $\phi[0;t]=1$

ロ) $|\phi[Z(k);t]|\leq 1$ (1.3)

ハ) $\phi[Z(k);t]^*=\phi[-Z(k);t]$

Hopf 方程式は次のように示される。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{1}{2}\iint kZ(k)\frac{\delta^2\phi}{\delta Z(k')\delta Z(k'')}\delta(k-k'-k'')dk\,dk'dk''$$
$$-\nu\int k^2Z(k)\frac{\delta\phi}{\delta Z(k)}dk \qquad (1.4)$$

このHopf方程式から比較的簡単な方法で導かれる近似理論を二つ取り上げて見よう。

1) モーメント打切り近似理論

これを導くには $\phi[Z(k);t]$ を汎関数べキ級数に展開して，

$$\phi[Z(k):t]=1+\sum_{n=2}^{\infty}\int\cdots\int M_n(k_1,\cdots k_n)Z(k_1)\cdots Z(k_n)dk_1\cdots dk_n \qquad (1.5)$$

を得る。ここで $M_n(n\geq N+1)$ を0として打切りを行い，(1.4) に代入すると近似方程式系が得られる。R_e数が大きいとき，M_{N+1} を0とした近似の粗さは時間の経過に従って，M_n $(n\leq N)$ へ影響を及ぼし，乱流終期を除いて良い近似とは云えない。またこの近似は条件(1.3)のロ)を満し得ない欠点もある。

2) 準正規分布の理論

特性汎関数の対数 $\ln\phi[Z(k):t]$ を汎関数べキ級数に

$$\ln \Phi[Z(k):t] = \sum_{n=2}^{\infty}\int\cdots\int C_n(k_1,\cdots k_n)Z(k_1)\cdots Z(k_n)\,dk_1\cdots dk_n \qquad (1.6)$$

と展開して，$C_4(k_1,\cdots k_4)=0$ とおき (1.4) に代入して，二次，三次の速度スペクトルについての方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)E(k) = -k\iint F(k,k',k'')\delta(k+k'+k'')\,dk'dk'' \qquad (1.7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\nu(k^2+k'^2+k''^2)\right]F(k,k',k'') = -\sum_{C(k,k',k'')} kE(k')E(k'') \qquad (1.8)$$

$k+k'+k''=0$ で $\sum\limits_{C(k,k',k'')}$ は k, k', k'' を cyclic に入れ替えて和をとることを意味する。

乱流速度場の確率分布が近似的に正規分布であるという事実と 1) の理論の欠陥をある程度救っていることからしてもこの理論は 1) より良い近似理論であるように思われるのだが，エネルギー・スペクトルに負の波数領域が現われる。その理由を調べるために，(1.8) を積分して見よう。

$$F(k,k',k'') = -\sum_{C(k,k',k'')} k\int_0^t e^{-\nu(k^2+k'^2+k''^2)(t-t')}E(k')E(k'')\,dt'$$

Re 数が大きいとき，波数の小さなエネルギーを多く含む領域では，近似的に $F(k,k',k'') \sim -\sum k\int_0^t E(k')E(k'')\,dt$ で表わされる。従って，この領域では，$E(k)$ の特性時間程度の間に，$F(k,k',k'')$ は成長を続け，一種の secularity が生じると思われる。より良い近似を行うならば，この secularity を押える効果が含まれなければならない。

§2　変関数の変換とその特性汎関数

$\Phi[Z(k):t]$ を $Z(k)$ の汎関数べき級数に展開して，打切りを行う近似法では良い近似は得られないように思われる。これは見方を変えて云うならば，そのような展開法では級数の収束性が悪いと云うことである。そこで $Z(k)$ を時々刻々適当な新しい変関数 $\zeta(k,t)$ に変換して $\zeta(k,t)$ の汎関数べき級数に展開して見よう。この変換によって良い収束性が得られる可能性があるだろう。$\zeta(k,t)$ は次のように定義しよう。

$$\zeta(k,t) = \zeta[Z(k);k,t]$$
$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int a_n(k,t;k_1,\cdots k_n)Z(k_1)\cdots Z(k_n)dk_1\cdots dk_n \tag{2.1}$$
$$Z(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int \tilde{a}_n(k,t;k_1,\cdots k_n)\zeta(k_1)\cdots\zeta(k_n)dk_1\cdots dk_n \tag{2.2}$$

$\zeta(k,t)$ は $Z(k)$ の汎関数であり，t の関数であるが，簡単のために $\zeta(k)$ と表わすことにする。

一様性乱流を扱うので，次のように表わしておこう。

$$\begin{aligned} a_n(k,t;k_1,\cdots k_n) &= a(k_1,\cdots k_n)\delta(k-k_1-\cdots-k_n) \\ \tilde{a}_n(k,t;k_1,\cdots k_n) &= \tilde{a}(k_1,\cdots k_n)\delta(k-k_1-\cdots-k_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$a(k_1,\cdots k_n)$，$\tilde{a}(k_1,\cdots k_n)$ は t を explicit に表わさない。

(2.1)，(2.2) は共に絶対収束する級数であるとしよう。そのとき，次の関係式がなければならない。

$$\tilde{a}(k) = 1/a(k)\quad,\quad \tilde{a}(k,k') = -a(k,k')/a(k)a(k')a(k+k')$$

$$\tilde{\alpha}(k,k';k'')=\left\{\frac{2}{3}\sum a(k,k'+k'')a(k',k'')/a(k'+k'')-a(k,k';k'')\right\}\Big/a(k)a(k')a(k'')a(k+k'+k'')$$

$$\cdots\cdots \qquad (2.4)$$

$$\Phi[Z(k);t]=\Psi[\zeta(k);t]$$

と表わされるとしよう。Hopf eq. は次のように表わされる。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\int A[\zeta(k);k]\frac{\delta\Psi}{\delta\zeta(k)}dk+\iint B[\zeta(k);k,k']\frac{\delta^2\Psi}{\delta\zeta(k)\delta\zeta(k')}dkdk' \qquad (2.5)$$

$$A[\zeta(k);k]=-\frac{\partial\zeta(k)}{\partial t}-\nu\int k_1^2 Z(k_1)\frac{\delta\zeta(k)}{\delta Z(k_1)}dk_1+\frac{1}{2}\iiint k_1 Z(k_1)\frac{\delta^2\zeta(k)}{\delta Z(k_2)\delta Z(k_3)}\delta(k_1-k_2-k_3)dk_1dk_2dk_3$$

$$B[\zeta(k);k,k']=\frac{1}{2}\iiint k_1 Z(k_1)\frac{\delta\zeta(k)}{\delta Z(k_2)}\frac{\delta\zeta(k')}{\delta Z(k_3)}\delta(k_1-k_2-k_3)dk_1dk_2dk_3$$

$A[\zeta(k);k]$, $B[\zeta(k);k,k']$ は $Z(k)$ の汎関数の形に表わされているが、(2.2) によって $\zeta(k)$ の汎関数で表わされる。

乱流の速度の確率分布はほぼ正規分布になっていることから

$$\Phi[Z(k);t]\sim\exp\left[-\frac{1}{2}\iint E(k)Z(k)Z(k')\delta(k+k')dkdk'\right]$$

従って、次のように書き示そう。

$$\Psi[\zeta(k);t]=\exp[-Q[\zeta(k)]] \qquad (2.6)$$

$$\begin{aligned}Q[\zeta(k)]&=\frac{1}{2}\iint\zeta(k)\zeta(k')\delta(k+k')dkdk'\\&\quad+\frac{1}{3!}\iiint\alpha(k,k';k'')\zeta(k)\zeta(k')\zeta(k'')\delta(k+k'+k'')dkdk'dk''\\&\quad+\cdots\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\cdots\int\alpha(k_1,\cdots k_n)\zeta(k_1)\cdots\zeta(k_n)\delta(k_1+\cdots+k_n)dk_1\cdots dk_n\end{aligned}$$

$a(k_1, \cdots k_n)$ を適当に選ぶことによって $Q[\zeta(k)]$ は急速に収束する級数となることが期待される。

(2.6) を (2.5) に代入して $\zeta(k)$ の汎関数べキに展開して，各べキの "係数" から乱流の方程式系が得られる。この計算は複雑で手間がかゝるので，別の方法でこれと同等な乱流方程式を導こう。

§3 乱流方程式

(2.6) の $Q[\zeta(k)]$ を $Z(k)$ の表現に書き改めると

$$
\begin{aligned}
Q[Z(k)] = & \frac{1}{2}\iint E(k) Z(k) Z(k') \delta(k+k') dk dk' \\
& + \frac{1}{3!}\iiint F(k,k',k'') Z(k) Z(k') Z(k'') \delta(k+k'+k'') dk dk' dk'' \\
& + \frac{1}{4!}\int\cdots\int G(k_1, \cdots k_4) Z(k_1) \cdots Z(k_4) \delta(k_1 + \cdots + k_4) dk_1 \cdots dk_4 \\
& + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
E(k) &= a(k)a(-k) = a(k)^2 \qquad (\, a(k) = \sqrt{E(k)} \text{ とする。}) \\
F(k,k',k'') &= 2\sum_{c(k,k',k'')} a(k)a(k',k'') + \alpha(k,k',k'') a(k) a(k') a(k'') \\
G(k_1,k_2,k_3,k_4) &= 2\sum_{\text{組}} \frac{a(k_3,k_4)}{a(k_3+k_4)} F(k_1,k_2,k_3+k_4) \\
& \quad -4\sum_{\text{組}} \frac{a(k_3,k_4)}{a(k_3+k_4)} \sum_{c(1,2)} a(k_1) a(k_2, k_3+k_4) \\
& \quad +6\sum_{c(1,2,3,4)} a(k_1) a(k_2,k_3,k_4) + \alpha(k_1, \cdots k_4) a(k_1) \cdots a(k_4)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$\sum_{\text{組}}$ は等しくない全ての組について和をとることを意味する。

$F(k,k',k'')$, $G(k_1,\cdots k_4)$ は3次，4次のキュムラントを示している。n次キュムラントは $a(k)$, $a(k,k')$, $\cdots a(k_1,\cdots k_{n-1})$, $\alpha(k,k',k'')$, $\cdots \alpha(k_1,\cdots k_n)$ と関係している。各次数のキュムラントはこれらの量を通して関係しており，例えば $a(k,k')$ は $F(k,k',k'')$ や $G(k_1,\cdots k_4)$ には大きな寄与をしているが，高次のキュムラントには，その相対的寄与は小さくなっていて，高次のキュムラントと低次のキュムラントの間の関係は薄らいでいくことを示している。

速度スペクトルは (2.6) と (3.1) を用いて，$\Phi[z(k)]$ の汎関数微分を実行して得られる。

$$
\begin{aligned}
\langle v(k)v(k')\rangle &= E(k)\delta(k+k') \\
\langle v(k)v(k')v(k'')\rangle &= iF^*(k,k',k'')\delta(k+k'+k'') \qquad (3.3) \\
\langle v(k_1)\cdots v(k_4)\rangle &= \sum E(k_1)E(k_3)\delta(k_1+k_2)\delta(k_3+k_4) \\
&\quad - G^*(k_1,\cdots k_4)\delta(k_1+\cdots+k_4)
\end{aligned}
$$

速度場の実数条件から

$$
\begin{aligned}
F(-k,-k',-k'') &= -F^*(k,k',k'') \\
G(-k_1,\cdots,-k_4) &= G^*(k_1,\cdots k_4)
\end{aligned} \qquad (3.4)
$$

(1.1) と (3.3) から速度スペクトルについての方程式が得られる。

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right)E(k) = -k\iint F_r(k,k',k'')\delta(k+k'+k'')dk'dk'' \qquad (3.5)
$$

$Fr(k,k',k'')$ は $F(k,k',k'')$ の real par である。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\nu\sum_{C(k,k',k'')}k^2\right]F(k,k',k'')$$
$$=-\sum_{C(k,k',k'')}kE(k')E(k'')+\sum_{C(k,k',k'')}\frac{k}{2}\iint G(k',k'',k_1,k_2)\delta(k-k_1-k_2)dk_1dk_2 \qquad (3.6)$$

§4 Closure の近似と $a(k,k')$ の決定

$a(k_1,k_2)$, $a(k_1,k_2,k_3)$, … を理想的に決定できるとするならば，$\alpha(k_1,k_2,k_3)$，$\alpha(k_1,\cdots k_4)$, …を0とすることも可能である。そのとき，$Q[\zeta(k)]=\frac{1}{2}\iint\zeta(k)\zeta(k')\delta(k+k')dkdk'$ と表わされる。しかし，上のような表現は原理的には可能であっても，実際にはそのような $a(k_1,k_2)$, … を知ることはできない。近似的な $a(k_1,k_2)$, … を選んだとするならば，$\alpha(k_1,k_2,k_3)$, ….は0ではないが，急速に小さくなっていて $Q[\zeta(k)]$ の級数の収束性は良く成っているだろう。

4次キュムラントの中では $a(k,k')$, $a(k,k',k'')$ を適当に選択決定できる。4次キュムラントまで考慮する限り，$a(k,k',k'')$ はどのように決定して良いのかわからないが，次のように決定しよう。

$$6\sum_{C(k_1,k_2,k_3,k_4)}a(k_1)a(k_2,k_3,k_4)=4\sum_{組}\frac{a(k_3,k_4)}{a(k_3+k_4)}\sum_{C(1,2)}a(k_1)a(k_2,k_3+k_4) \qquad (4.1)$$

この決定は $Q[\zeta(k)]$ を全体として考えるとき，近似的にあ

まり良いものではないかも知れない。しかし，4次キュムラントに関する限り，$a(k_1, k_2)$ を適当に選択することによって良い近似に補い導くことができると思われる。上のような選択決定によって $\alpha(k_1, k_2, k_3)$，$\alpha(k_1, k_2, k_3, k_4)$，… が十分小さくなっていると考える。（$a(k, k')$ はまだ決定されていないが，後に決定しよう。）従って，$\alpha(k_1, \cdots k_4)$，… は0としよう。$\alpha(k_1, \cdots k_4) = 0$ と (4.1) から $G(k_1, \cdots k_4)$ は次のようになる。

$$G(k_1, k_2, k_3, k_4) = 2\sum_{組} \frac{a(k_3, k_4)}{a(k_3+k_4)} F(k_1, k_2, k_3+k_4) \qquad (4.2)$$

(3.6) は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{c(k,k',k'')} (\nu k^2 + \gamma(k))\right] F(k, k', k'') \\ &= \sum_{c(k,k',k'')} \Big[k E(k)\{E(k') + E(k'')\} + \frac{a(k', k'')}{a(k)} W(k) \\ &\qquad + 2\iint \sum_{c(k',k'')} k'' \frac{a(k', k_1 - k')}{a(k_1)} F(k, k_1, k_2)\delta(k+k_1+k_2)\,dk_1 dk_2 \Big] \qquad (4.3)\end{aligned}$$

$$W(k) = -k\iint F(k, k', k'')\delta(k+k'+k'')\,dk'dk'' \qquad (4.4)$$

$$\gamma(k) = k\iint \frac{a(k', k'')}{a(k)} \delta(k+k'+k'')\,dk'dk'' \qquad (4.5)$$

$W(k)$ はエネルギー伝達関数であり，$\gamma(k)$ はこれが正値をとるとき，乱流粘性の役割を果すことになる。この $\gamma(k)$ によって即ち乱流粘性が導かれたことによって，準正規分布の

理論のような secularity の発生を防ぐことができるだろう。

さて，$a(k,k')$ の決定をどのようにしたら良いのか？ この選択決定は目下のところ確立していない。

試みに $a(k,k')$ を次のように決定しよう。(4.3)の左辺第三項と右辺第二項によって右辺第一項を打消し，準正規分布の理論のような secularity の発生を防ぐように $a(k',k'')$ を決定しよう。但し $F(k,k',k'')\sim 2\sum_{C(k,k',k'')} a(k)a(k',k'')$ と近似して $\alpha(k,k',k'')$ は小さいとした。更に，$\gamma(k)$ は正値をとるように選んでいる。

$$2\gamma(k)a(k)a(k',k'')=kE(k)\{E(k')+E(k'')\}+\frac{W(k)}{a(k)}a(k',k'') \tag{4.6}$$

$$\frac{a(k',k'')}{a(k)}=k\tau(k)\{E(k')+E(k'')\} \tag{4.7}$$

$$\tau(k)=1/\{2\gamma(k)-W(k)/E(k)\} \tag{4.8}$$

$$\gamma(k)=\frac{1}{4}\left[\frac{W(k)}{E(k)}+\sqrt{\frac{W(k)^2}{E(k)^2}+16\overline{u}^2k^2}\right] \tag{4.9}$$

$$\overline{u}^2=\int_{-\infty}^{\infty}E(k)dk$$

$\tau(k)$は波数kの大きさの乱流の特性時間を示すものと思われる。

§5　数値計算

§4で述べた近似により $a(k,k')$ は(4.7)で表わされ，(3.5)と(4.3)は(4.4)，(4.8)，(4.9)を用いてcloseした方程式系を構成する。これを差分方程式に近似して数値計算を行った。

初期条件は次のように与えた。

$$E(k,0)=4k^2e^{-k^2/k_0^2}/\sqrt{\pi k_0^2}$$

$$F(k,k',k'')=0$$

レイノルズ数 Re は次のように定義している。

$$Re=u_0/\nu k_0\ ,\quad u_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}E(k,0)dk$$

時間の単位は $(5k_0u_0)^{-1}$ を1ととっている。実行された計算は $Re=40$ の場合でFig 1にその結果を示す。$\tau=4$ で，高波数においてはエネルギーの等分配に近いスペクトルが現われている。これはエネルギーの伝達の割合が大きすぎるように思われる。エネルギースペクトルが負の波数領域は現われないが，近似はあまり良好とは云い難いようである。

§6　結び

$a(k,k')$ の決定方法は現在のところはっきりしないので，仮に(4.7)のように選んだ。結果は，確かにエネルギー・スペクトルに負の値は出現しないが，高波数における近似は良い

とはいい難い。これは $F(k, k', k'')$ が高波数において大きくなり過ぎているためと考えられる。今後は $a(k, k')$ の決定の規準をはっきりさせ，更に良い近似を得るようにしたい。また，同様の方法で三次元乱流の研究を進めたい。

最後に，ここでの $a(k, k')$ の決定方法は研究集会で発表した時の方法とは異っている。研究集会に於ては，

$$a(k', k'') = \tau(k, k', k'')\, k\, a(k) \{E(k') + E(k'')\}$$

$$\tau(k, k', k'') = \sum_{c(k, k', k'')} \frac{k}{\vartheta(k)} \hat{\sigma}(k')$$

$$\vartheta(k) = \sqrt{k^3 E(k)/2}$$

とした。しかし，その後再検討した結果，上のような $a(k', k'')$ では，研究集会で発表したような結果は得られないことがわかった。この場をかりて，誤りの報告をさせていただきます。

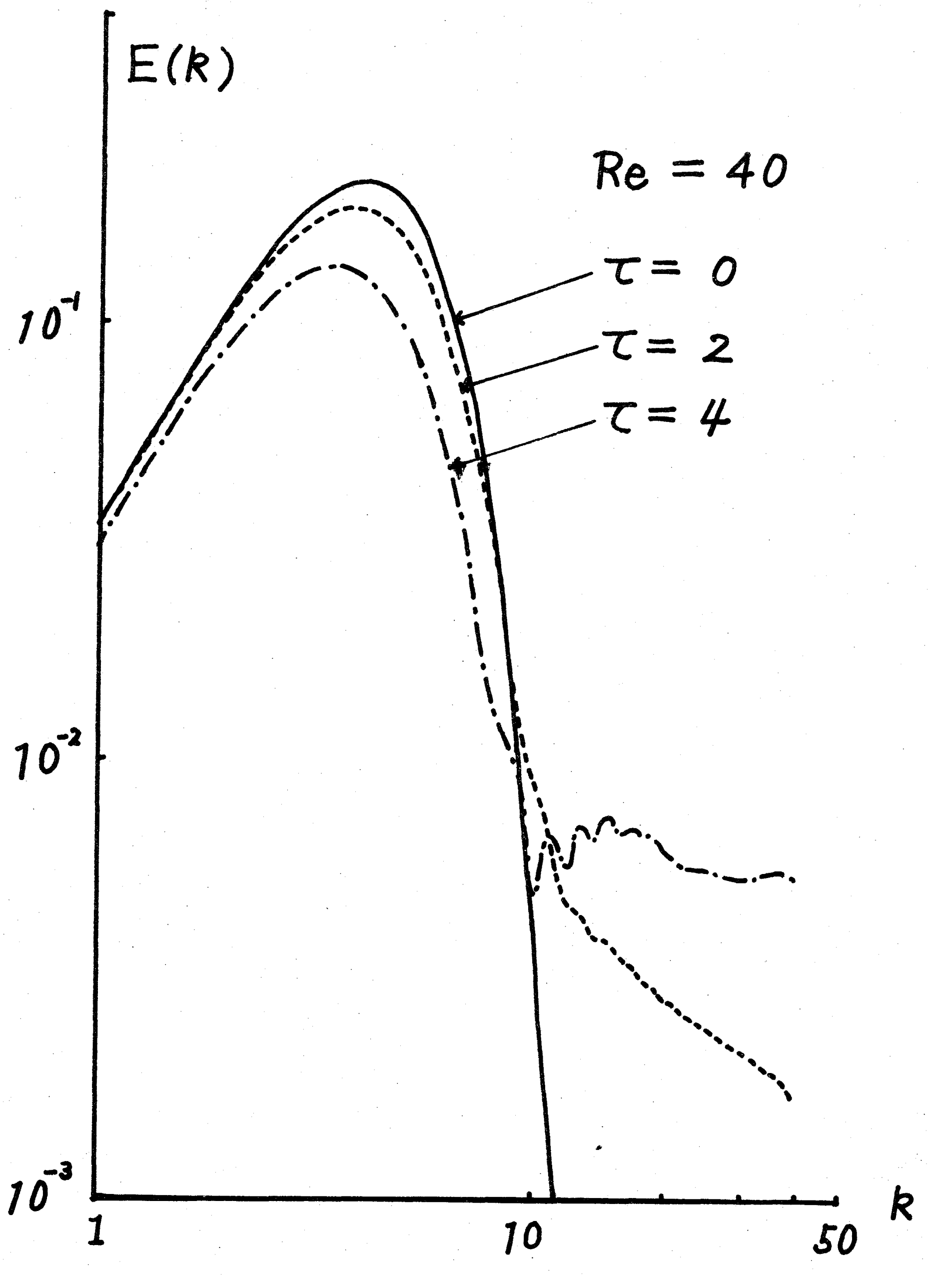

Fig 1