数理解析研究所講究録
第 356 巻 1979 年 1-21

C^*-algebras の regular σ-completions について

東北大 理 斎藤和之

C^*-algebra が W^*-algebra として忠実に表現できるための本質的条件は何か？という問題から出発した Rickart - Kaplansky の program は G.K. Pedersen の次の結果により決着がつけられた。

Theorem（[11]）AW^*-algebra が W^*-algebra として忠実に表現できるための必要十分条件はそれが c.a. states を十分沢山もつことである。(*)

AW^*-algebra は W^*-algebra (von Neumann algebra) の理論のその作用する Hilbert space に関係のない部分の抽象化（W^*-algebra の essense）として Kaplansky により導入された。それは任意の subset の (left or right) annihilator が projection により生成される単項イデアルであるような C^*-algebra であり projections に対する束論，type-classification，極分解等が成立することが知られている（[3]）。それらは S.K. Berberian の本にまとめられた。（[3]）

Operator algebra の研究者に AW^*-algebra が注目されなかった大きな理由の1つは non W^*, AW^*-algebra の例が研究の対象となる

(*) もちろん Kadison, S. Sakai による別方向の特徴づけがある事も忘れてはならない。

ほど多くなかったことであろう。1970年，Takenouchi, Dyer 等により non W^*, AW^* factor が構成されたのに刺激され，J. D. M. Wright は，任意に与えられた (separable) C^*-algebra (<u>unital</u>) A の regular-σ-completion をつくりその completion algebra $\hat{A}$ が A が simple の場合 non W^*, type III AW^*-factor になることを示した。[16, 17] この事については，数理研講究録 320 p119 を参照されたい。

これはかってに与えられた separable <u>unital</u> C^*-algebra $\underset{A}{\frown}$ から簡単な関数解析的方法で，non W^*, AW^* algebra (monotone closed) $\underset{\hat{A}}{\frown}$ が構成できるという点で注目すべきであり次に問題になるのは，"A の性質と $\hat{A}$ の性質とがどのように影響しあうか？" ということである。J. D. M. Wright の理論は C^*-algebra に <u>unit</u> を仮定したため構造論を展開する場合必要なイデアル（ほとんど unit をもっていない）の regular σ-completion を考える場合（もちろんその他にも unit のない重要な C^*-algebras が沢山ある）に障害になるので我にはここでまず <u>non unital</u> な C^*-algebra A の "adjunction of a unit C^*-algebra A_1 の regular σ-completion について調べ $\hat{A_1}$ の構造が A の構造とどのように影響しあうか，今後の理論の展開に必要と思われる "Introductory" な部分について展開してみる。個々の algebra（特に simple な C^*-algebra）についての議論は今後の研究に待たねばならない。

議論に入る前に unital C^*-algebra の regular σ-completion について

復習しておく。まずDixmierの例（[4]）から始めよう。$C[0,1]$を閉区間$[0,1]$上の複素数値連続関数全体のつくるC^*-algebra（加法，スカラー乗法，積は"pointwise"に入れnormはuniform topology）とし，$\mathcal{B}[0,1]$を$[0,1]$上の有界Baire関数全体のつくるC^*-algebra（定義は$C[0,1]$と同じ）とし，$\mathcal{O}$を$\mathcal{B}[0,1]$の元でその台が$[0,1]$のmeager subsetに入るもの全体のつくる<u>σ-ideal</u>とすると$D[0,1]=\mathcal{B}[0,1]/\mathcal{O}$は，non W^*, abelian AW^* algebraであった。J. D. M. Wrightの理論はこの"non-commutative analogue"を考えることである。Bを<u>unital</u> C^*-algebraとしたとき，Bを非可換関数空間と考える場合その state space X_B上の"continuous affine function"sとして表現することはKadisonによりすでに行われていることでそれを踏襲しよう。その時，"non commutative" Baire affine function"に相当するBのBaire*-envelope $\mathcal{B}_B$はPedersen(- Kadison) [10, 12] に従うことにする。

次にmeagerな台をもつBaire functionsのつくるσ-idealに相当する$\mathcal{O}_B$を定義するがこの場合B_R, B''_R（Bのhermitian part，B''（Bのsecond dual（[5]）のhermitian part）はそれぞれBのstate space X_B（$\sigma(B^*, B)$-compact）上のそれぞれcontinuous，boundedなaffine functionsと見直しておくことにすれば，$M(B) \overset{\text{def.}}{=} \{ m \in B''$；$\{x ; x \in \partial X_B ; m(x) \neq 0\}$が$\partial X_B$の$\sigma(B^*, B)$-meager subsetに入る$\}$（但し$\partial X_B$は$B$のpure statesのthe spaceで，$\partial X_B \big| \sigma(B^*, B)$はBaire space）と定義することにより$M(B)$は$B''$の$\sigma$-idealである。$\mathcal{O}_B = M(B) \cap \mathcal{B}_B$

が求める $\mathfrak{B}_B$ の σ-ideal である。∂X_B が Baire space より $\mathcal{M}_B \cap B = \{0\}$ 従って，q_B を $\mathfrak{B}_B$ onto $\mathfrak{B}_B/\mathcal{M}_B$ の canonical map とすれば，E. Christensen ([19]) により $\hat{B} \equiv \mathfrak{B}_B/\mathcal{M}_B$ は monotone σ-complete (unital) C^*-algebra で，q_B は σ-homomorphism で，$q_B|B$ は injection である。

<u>Theorem</u> ([16, 17])．$(\hat{B}, q_B)$ は B の regular σ-completion である。i.e. 次の (1) (2) を満足する。(**)

(1) $\hat{B}$ は $q_B(B)$ を <u>σ-generate</u> する i.e. $q_B(B_h)$ を含む $\hat{B}_h$ の最小の σ-subspace が $\hat{B}_h$ である，

(2) $q_B(B_h)$ は $\hat{B}_h$ で <u>order dense</u> である i.e. $\forall x \in \hat{B}_h$ に対して，$x = \mathrm{l.u.b.}\{q_B(a) ; q_B(a) \leq x\}$ in $\hat{B}_h$。

彼はさらに $(\hat{B}, q_B)$ は B に対して次の意味で unique であることを示した。(C, γ) を (1), (2) を満す別の σ-completion of B とすれば

$$(*) \quad \begin{tikzcd} \hat{B} \arrow[rr, "\exists \beta", "*\text{-isomorphism}"'] & & C \\ & B \arrow[ul, "q_B"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

証明の key point は $\mathfrak{B}_B$ を X_B 上の Baire function と考え Choquet-Bishop-deLeeuw-Alfsen の理論を使うものであった。

$\hat{B}$ の構造を調べる重要な道具となる性質は次の事柄である。

<u>命題</u> ([16])．J を $\hat{B}$ の proper closed two-sided ideal とすれば，$J \cap B$ も B の proper closed two-sided ideal である。

単位元(unit)を有たない C^*-algebra A の場合事情が異なる。i.e.

(**) さらに B が separable なら $\hat{B}$ は σ-finite monotone complete AW*-algebra である。

Aをその state space X_A 上に表現するのではなく Quasi-state space Q_A ($=\{\phi\in A^*;\ \|\phi\|\leqq 1,\ \phi\geqq 0\}$ 但し A^*は Aの Banach space dual) 上の continuous affine functions vanishing at 0 として表現するのが適切と思われる (X_A は $\sigma(A^*,A)$-compact ではない)。Aの universal Hilbert space H_A 上の identity operator 1_{H_A} は一般に X_A 上 continuous だが Q_A 上 lower semi-continuous (従って Borel) だが continuous ではない。しかし Aが separable なら countable increasing approximate identity があるので 1_{H_A} は Q_A 上 Baire function である。今 Aと 1_{H_A} とで生成された C^*-algebraを$\hat{A}$としたとき, $\mathcal{B}_A$と, $\hat{A}''$を含む $\mathcal{B}(H_A)$の最小の monotone σ-closed subalgebra A_0^{∞}とは一般に区別しなければならない。Q_Aの extreme points 全体 $\partial Q_A=\partial X_A\cup\{0\}$ に注意すると次の事が成立する。

Lemma 1. Aを non-unital な C^*-algebra とすると $\{0\}$が ∂Q_Aの $\sigma(A^*,A)|\partial Q_A$-topology に関して rare set となり ∂X_A はこのtopology に関して Baire space である。

$\mathfrak{m}_A=\{m\in A'';\ \{\phi;\ \phi\in\partial X_A;\ m(\phi)\neq 0\}$ が ∂X_A の $\sigma(A^*,A)$-meager set になる$\}$ とし, $\mathcal{O}_A=\mathfrak{m}_A\cap\mathcal{B}_A$, $\mathcal{J}_A=\mathfrak{m}_A\cap A_0^{\infty}$ とすれば, $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{J}_A$ はそれぞれ $\mathcal{O}_A\cap A=\{0\}$, $\mathcal{J}_A\cap\hat{A}=\{0\}$ を満す $\mathcal{B}_A$, A_0^{∞}の σ-ideal である事がわかる。そして, E. Christensen によれば, $A_0^{\infty}/\mathcal{J}_A$ は monotone σ-complete C^*-algebra (unital) でその canonical quotient map $\hat{q}_A$ は σ-homomorphism である。我々の最初の目的は

Aに抽象的に1をadjoinしたC*-algebra A_1 のJ.D.M. Wrightの意味のregular σ-completion $(\hat{A}_1, \beta_{A_1})$ が $(A_0^\infty/g_A, \tilde{\beta}_A)$ と同値であることを示すことにある。もちろん $\tilde{\beta}_A(\hat{A})$ が A_0^∞/g_A の中で上述の(1),(2)を満すことを示せばよいのだが $\sigma(A^*, A)$-compactでない X_A でのChoquet-Bishop-de-Leeuwの理論（Alfsen: compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971）の議論が微妙になるのでLemma 1を使い，$\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}$ と A_0^∞/g_A とが上の同値性 (*) を満すような対応を直接構成することにする。

<u>Theorem 1</u> Aを<u>non unital</u> C* algebraとし，$(\hat{A}_1, i)$ を A_1 のregular σ-completionとすれば，次のdiagramが可換になるような $\hat{A}_1$ onto A_0^∞/g_A の*-isomorphism $\hat{\phi}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_1 & \xrightarrow{\ \hat{\phi}\ } & A_0^\infty/g_A \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\beta}_A} \\ A_1 & \xrightarrow{\ \phi\ } & \hat{A} \end{array}$$

但しここに ϕ は A_1 onto $\hat{A}$ のcanonical *-isomorphismとする。

証明の概略は次のようである。A_1 のregular σ-completionは $(\mathcal{B}_{A_1}/\mathcal{O}_{A_1}, \beta_{A_1})$ としてよい (by (*))。今 H_1 を A_1 のuniversal Hilbert space π_1 を A_1 のuniversal representationとすれば，$H_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} H_{\tilde{\varphi}}$，$\pi_1 = \sum_{\tilde{\varphi}\in X_{A_1}} \pi_{\tilde{\varphi}}$ 但し $\{\pi_{\tilde{\varphi}}, H_{\tilde{\varphi}}, \eta_{\tilde{\varphi}}\}$ を A_1 の $\tilde{\varphi}\in X_{A_1}$ によるGNS-constructionとする。X_{A_1} = convex hull of $\{\tilde{\phi}, \phi_0, \phi\in X_A\}$ 但し $\tilde{\phi}(a+\lambda 1) = \phi(a)+\lambda$，$\phi_0(a+\lambda 1) = \lambda$ ($\forall a\in A$, λ: complex numbers) に注意して，$\partial X_{A_1} =$

$\{\tilde{\phi}, \phi \in \partial X_A\} \cup \{\phi_0\}$ であるから A の universal Hilbert space H は,
H_1 の closed subspace $\tilde{H} = \sum_{\phi \in X_A} H_{\tilde{\phi}}$ と $V\eta_{\tilde{\phi}}(a) = \eta_\phi(a)$ $(\forall a \in A, \forall \phi \in X_A)$
により定義された onto isometry V を仲介として isometrically isomorphic
である。$\Phi(x) = V^* P_{\tilde{H}} V$ $(\forall x \in A_1'')$ (但し $P_{\tilde{H}}$ は $\tilde{H}$ 上の orthogonal projection)
により定義された map Φ は, $\Phi(\pi_1(a+\lambda 1)) = a + \lambda 1_{H_A}$ $\forall a \in A$, λ: complex numbers を満す A_1'' into A'' の σ-weakly continuous $*$-homomorphism
でありこの map はさらに $x(\tilde{\phi}) = \Phi(x)(\phi)$ $\forall x \in A_1''$, $\phi \in X_A$ を満す。
従って Pedersen の議論から $\Phi(\mathcal{B}A_1) = A_0^\infty$ である。さらに Lemma 1
に注意すると $\Phi(\mathcal{J}A_1) = g_A$ 且つ $(\Phi|\mathcal{B}A_1)^{-1}(g_A) = \mathcal{J}A_1$ も満して
いる。今 $\hat{\Phi}(a + \mathcal{J}A_1) = \Phi(a) + g_A$ とすればこの map $\hat{\Phi}$ は定理1
の要求をすべて満すことが確められる。

今後記号を簡単にするために, $(A_0^\infty/g_A, \hat{\imath}_A)$ を $(\hat{A}, \imath)$ と表わすことにする。もし A が unital ならば我々の記号は Wright の記号と一致することは $A_0^\infty = \mathcal{B}A$, $g_A = \mathcal{J}A$ より明らかであろう。

さらに一般に A が strictly positive element をもつ (特に A が separable) ならば前に注意したことから $A_0^\infty = \mathcal{B}A$, $g_A = \mathcal{J}A$ で, $(\hat{A_1}, \imath)$ は $(\mathcal{B}A/g_A, \imath_A)$ と同値である。以下 $\hat{A}$ を A の regular σ-completion algebra と呼ぶことにする。

次の命題は構造論をやる上で重要な道具になる ideal の regular σ-completion を考える上で有効である。

Proposition 1. A を unital な C^*-algebra か又は non unital separable

なC^*-algebra とする。I を A の separable closed two-sided ideal とし、p を $\mathcal{B}_A$ に於ける I の open supporting central projection とする。その時、I の regular σ-completion algebra $\hat{I}$ は $\hat{A}$ の direct summand $\hat{A}z$ (但し $z = \gamma_A(p)$ (p の γ_A による canonical image で、$\hat{A}$ の central projection である)) と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$
\begin{tikzcd}
\hat{I} \arrow[r, "\exists\tilde{\phi}"] & \hat{A}z \\
\tilde{I} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"] & C^*(\gamma_A(I), z)\ (\equiv \tilde{\tilde{I}}) \arrow[u, "\cup\,\tilde{\tilde{I}}"']
\end{tikzcd}
$$

但し ϕ は $\tilde{I}$ onto $\tilde{\tilde{I}}$ の canonical $*$-isomorphism で $C^*(\gamma_A(I), z)$ は、$\gamma_A(I)$ と z とにより generate された C^*-algebra である。

これを証明するためには $\gamma_A(C^*(I,p)_{\mathfrak{R}})$ が $(\hat{A}z)_{\mathfrak{R}}$ で order dense である事及び $\hat{A}z$ が $\gamma_A(C^*(I,p))$ を σ-generate することを示せばよいがこれらは次の Lemma 2 からでてくる結果である。

Lemma 2. 上の記号を使うことによって

$$(C^*(A, 1_H)p)_{\mathfrak{R}} \subset (((C^*(I,p)_{\mathfrak{R}})_\sigma$$

但し $Np = \{xp \ ; x \in N\}$ $\forall N \subset \mathcal{B}(H)$, $M_\sigma = \{x;\ x_n \uparrow x$ strongly in $\mathcal{B}(H)$ for some increasing sequence $\{x_n\}$ in $M_{\mathfrak{R}}\}$ $\forall M \subset \mathcal{B}(H)_{\mathfrak{R}}$ である。

proof. $(C^*(A, 1_H)p)_{\mathfrak{R}} = (A_{\mathfrak{R}})p + \mathbb{R}p$ 但し $\mathbb{R}$ は real numbers field とする。$\{u_n\}$ を I の countable increasing approximate unit for I とすれば $u_n \uparrow p$ strongly in $\mathcal{B}(H)$ に注意すれば、$\forall a \in A_{\mathfrak{R}}$ に対して

$$b_n = (\|a\|1_H + a)^{1/2} u_n (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\|p$$

$\in C^*(I, p)_h$ 且つ

$$b_n \uparrow (\|a\|1_H + a)^{1/2} p (\|a\|1_H + a)^{1/2} - \|a\|p = ap$$

strongly in $\mathcal{B}(H)$ となり Lemma 2 が従がう。

上の命題を使用することにより，次の Theorem 2 が成り立つ。

Theorem 2. A を non unital separable C^*-algebra とし，$M(A)$ を A の multiplier algebra とする。その時，$M(A)$ の regular σ-completion algebra $\widehat{M(A)}$ は monotone complete σ-finite AW^*-algebra であり $\hat{A}$ onto $\widehat{M(A)}$ の $*$-isomorphism ψ が次の diagram を可換にする如く存在する。

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r, "i"] & \hat{A} \arrow[r, "\psi"] & \widehat{M(A)} \\
\mathfrak{M}(A) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"] & q_A(M(A)) \arrow[u] \arrow[r, "(q_A|M(A))^{-1}", "*\text{-isomorphism}"'] & M(A) \arrow[u, "q_{M(A)}"'] \\
\tilde{A} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"] & \tilde{A} \arrow[u] \arrow[r, "i"] & \tilde{A} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

但しここに $\mathfrak{M}(A)$ は $\{x \in \hat{A} \,;\, xa \in A,\ ax \in A \quad \forall a \in A\}$ i.e. $\mathfrak{M}(A)$ は A の $\hat{A}$ に於ける idealizer である。

証明の概略は次のようである。一般論より $M(A)$ は $\mathcal{B}(H_A)$ の A と 1_{H_A} とを含む (i.e. $\tilde{A}$ を含む) C^*-algebra となっており，A を次のような意味で essential (に含む ideal) (C^*-algebra) である。 i.e. $M(A)$ の non-zero closed two-sided ideal J で $J \cap A = \{0\}$ となるものはない。今 P

を A の $\mathfrak{B}_{M(A)}$ (A は separable に注意) に於ける supporting open central projection とすると A が essential である事から $z_{M(A)}(p)=z=1$ が示される。従って上の projection により $\hat{A}$ と $\widehat{M(A)}$ の間に $*$- isomorphism があって命題の diagram を可換にする。又 Akemann, Pedersen, Tomiyama [1] の理論を借用することにより $z_A(M(A))$ が A の $\hat{A}$ に於ける idealizer である事がわかる。

次に a separable C*-algebra A の regular σ-completion algebra $\hat{A}$ の center の構造を調べてみよう。その為に次のような命題が必要である。

<u>Proposition 2</u>　A を separable C*-algebra とすれば A の <u>Baire*-envelope</u> $\mathfrak{B}_A$ は Misonou [9] の意味で <u>weakly central</u> である。

この proposition の証明は F. B. Wright が [15] で AW*-algebra に対して用いた technique の modification である。その "key point" は $\mathfrak{B}_A$ が countably generated である事に注意して <u>projections に関する "comparability theorem"</u>, equivalence に関する <u>countable additivity</u>, <u>elements の polar decomposition</u> 等が $\mathfrak{B}_A$ の中で成立することでありこれらは Davies, Kehlet の論文に詳しい。

この事と, J. Vesterstrøm [18] の定理を使用することにより次の結果が成り立つ。

<u>Theorem 3</u>　A を separable C*-algebra とし, $\hat{A}$ をその regular σ-completion algebra とすれば $\hat{A}$ の center は $\mathfrak{B}_A$ の center C

の $\mathcal{B}_A$ onto $\hat{A}$ の canonical map g_A $(\equiv i)$ による canonical image である。

<u>Theorem 4</u>　A を Hausdorff primitive ideal space Prim A をもつ separable GCR-C^*-algebra とし、A の ideal center (i.e. $M(A)$ の center) を $Z(M(A))$ で表わすことにすると、$\hat{A}$ の center $\hat{A}^\natural$ ($\cong \widehat{M(A)}$ の center) $\hat{A}^\natural$ $(= \widehat{M(A)}^\natural)$ は Prim A 上の bounded complex-valued Baire functions 全体のつくる pointwise definition with uniform norm による algebra modulo meager sets の C^*-algebra (AW*) $D(\mathrm{Prim}\,A)$ と $*$-isomorphic である $\widehat{Z(M(A))}$ (ideal center の regular σ-completion) と次の意味で $*$-isomorphic である。

$$
\begin{array}{ccccc}
\widehat{M(A)}^\natural & \xrightarrow[\ast\text{-isomorphism}]{\exists\,\hat{\phi}} & D(\mathrm{Prim}\,A) & \xrightarrow[\ast\text{-isomorphism}]{\exists\,\psi} & \widehat{Z(M(A))} \\
\uparrow{\scriptstyle g_{M(A)}} & & \uparrow{\scriptstyle g\,(\text{canonical map})} & & \uparrow{\scriptstyle i} \\
Z(M(A)) & \xrightarrow{\ \phi\ } & C_b(\mathrm{Prim}\,A) & \xrightarrow{\ \phi^{-1}\ } & Z(M(A))
\end{array}
$$

但し ϕ は $Z(M(A))$ から Prim A 上の bounded continuous functions (complex-valued) 全体のつくる C^*-algebra 上への Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。

証明の概略は次のとおりである。C を $\mathcal{B}_A$ の center とすると各 $z \in C$ と $\phi \in \partial X_A$ に対して operator $\pi_\phi(z)$ は scalar $f_z(\phi)$ multiple of identity 1_{H_ϕ} である。もし $\phi, \phi' \in \partial X_A$ が $\pi_\phi \sim \pi_{\phi'}$ (unitarily) を満せば $f_z(\phi) = f_z(\phi')$ であるから A が GCR algebra であれば $\exists_1$ Prim A 上の complex-valued function h_z : $h_z(\mu(\phi)) = f_z(\phi)$

$\forall \phi \in \partial X_A$ 但し μ は ∂X_A onto Prim A の $\mu(\phi) = \pi_\phi^{-1}(0)$ による canonical continuous open mapping である。 $z \longmapsto h_z$ なる対応は $\mathbb{C}$ から Prim A 上の complex-valued functions の the algebra の中への injection より "$z \longmapsto h_z$" により Prim A 上に topological Borel structure より大きいが Mackey の Borel structure より小さい Borel structure が入る。 A は GCR であり separable であるから 2nd countable locally compact Hausdorff space Prim A 上で上の3つの Borel structures は一致するから "$z \longmapsto h_z$" は $\mathbb{C}$ onto $\mathcal{B}$(Prim A) (Prim A 上の bounded complex-valued Baire functions のつくる the algebra) の $*$-isomorphism で (記号で ϕ で表わす) その $Z(M(A))$ への restriction $\phi \,|\, Z(M(A))$ は $Z(M(A))$ onto C_b(Prim A) の Dauns-Hofmann の意味の $*$-isomorphism である。 Prim A の any meager subset N に対して $\mu^{-1}(N)$ が又 ∂X_A の meager subset である事に注意すれば定理の証明は abelian (classical) case の結果から示すことができる。

さらに次の事に注意しよう。

<u>Proposition 3</u> A を separable C^*-algebra とすると A が <u>Primitive</u> であるための必要十分条件は $\hat{A}$ が factor であることである。

これは Wright の ideal に関する結果及び C^*-algebra に関する Classical result (Dixmier の教科書) から証明できる。

次にGCR-algebras, NGCR-algebras の regular σ-completion algebra について考察しよう。

まず次の例を述べる。A を separable infinite dimensional Hilbert space K 上に act する UHF-algebra とし、B = A + C(K)（但し C(K) は K 上の compact operators のつくる C^*-algebra）とすれば、B は separable C^*-algebra で、$B/C(K) \cong A$ である。何故ならば $A \cap C(K) = \{0\}$ だから。従って一般論により (B(K), i) が C(K) の、従って B の regular σ-completion であるから我々は $\hat{B} = B(K)$ を得る。しかし B は not GCR である。何故ならば A が NGCR algebra だからである。しかしながら我々は次の事を示すことができる。

<u>Theorem 5</u>. A を separable C^*-algebra とすれば A が <u>GCR</u> である為の必要十分条件は A の <u>every</u> ideal quotient A/I の regular σ-completion である AW^*-algebra $\widehat{A/I}$ が type 1 であることである。

"If" part は Pedersen の GCR-algebra に関する Baire *-envelope の構造論による。逆に $\hat{A}$ が <u>type 1</u> AW^*-algebra とするとき、Ia を $\hat{A}$ の abelian projections 全体から生成された C^*-algebra とすると Ia は Halpern [7] の結果より $\hat{A}$ の <u>CCR-ideal</u> である。又 $C^*(A, 1_H)_{\mathfrak{B}} = \hat{A}_{\mathfrak{B}}$ は $\hat{A}_{\mathfrak{B}}$ で order dense より <u>$Ia \cap A \neq \{0\}$</u>。この事から A は non-zero CCR-ideal を含む。i.e. 我々は A の every non-zero ideal quotient A が non-zero CCR-ideal をもつことがわかり A は

GCR-algebraである。

<u>Theorem 6</u> Aを<u>separable</u> C*-algebraとするとAがNGCR-C*-alg(ebra)であるための必要十分条件はAW*-algebra $\hat{A}$ がtype 1 direct summandをもたないことである。従って、もしAがseparable NGCRならば $\hat{A}$ は如何なる<u>W*-direct summand</u>をもたないし又如何なるnon-trivial separable representationももたない。

実際もしAが如何なるtype 1 direct summandももたないとし、Aがnon-zero GCR ideal Iをもてば type 1 AW*-algebra $\hat{I}$ はTheorem 2から $\hat{A}$ のdirect summandとなり矛盾する。

もしもAがNGCRで $\hat{A}$ がW*-direct summand $\hat{A}z$ をもてば、$\hat{A}z$ はtype 1である。何故ならば $\hat{A}z$ のpure statesのthe spaceが<u>separable</u>だからである。しかしこの事は上の事実と矛盾する。従ってAがNGCRならば、$\hat{A}$ はW*-direct summandをもたない。

注意(1). Aがseparable C*-algebraとするとAがGCRである為の必要十分条件は $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factor $\forall J \in \mathrm{Prim}A$ である。"if"の部分を証明するためにはGlimmによるNGCR-algebrasに対する"quasi matrix systems"の構成が必要である。

(2) Aがseparableで NGCRならば(1)から $\exists J \in \mathrm{Prim}A$: $\widehat{A/J}$ が<u>non W*</u>, <u>σ-finite</u> <u>monotone complete AW*-factor of type III</u> である。我々はさらに<u>separable</u> primitive NGCR-C*-algebra Aで $\forall J \in \mathrm{Prim}A - \{0\}$ に対して $\widehat{A/J}$ がtype 1 W*-factorであるが $\hat{A}$ 自身

は non W^*-monotone complete σ-finite type III AW^*-factor になるような例をあげることができる。[H. Behnke, F. Krauss, H. Leptin の論文にその例が implicit に述べてある [2]]

(3) すべての simple NGCR C^*-algebra without unit A に対して $\hat{A}$ は non W^*, monotone complete, σ-finite AW^*-factor of type III になることがわかる。実際もし $\hat{A}$ が semi-finite ならば $\hat{A}$ が faithful state をもつ事に注意してそれは type I W^*-algebra となるはずであるがしかしこの事は Theorem 6 から A が NGCR である事に反する。

次に dual C^*-algebra の Regular σ-completion algebra について述べよう。主な定理は次のようである。

Theorem 7 A を separable C^*-algebra とすると次の3つの条件は同値である。

(i) A は dual C^* algebra である,

(ii) $\widehat{M(A)} = M(A)$ $(\cong \hat{A})$,

(iii) $M(A)$ が "C^*-algebra として" AW^*-algebra である。

この定理の証明の為には次の technical lemma が必要である。

Lemma 3 A が separable C^*-algebra とするとその multiplier algebra $M(A)$ の pure states の the space $\partial X_{M(A)}$ は $\sigma(M(A)^*, M(A))$-separable である。

次の Lemma は Theorem 7 の 'Commutative version' である(結果、

はclassicalであると思われるが一応ここで述べておく)。

<u>Lemma 4</u>. Xを2nd countable locally compact Hausdorff spaceとし,$C=C_0(X)$をX上のvanishing at infinityであるcomplex-valued continuous functions全体のつくるC^*-algebraとする。もしもCのmultiplier algebra $M(C)$(それはXのStone-Čechのcompactification βX上の$C(\beta X)$と$*$-同型であるが)がAW^*-algebra(i.e. βXがStonean space)ならば,Xは<u>countable discrete space</u>である。

Theorem 7の証明の概略は次のとおりである。(i) $\to$ (ii) $\to$ (iii)は比較的容易である。(iii) $\to$ (i)を検討しよう。$M(A)$がAW^*-algebraとすれば$M(A)=M(A)e_1+M(A)e_2+M(A)e_3$ $(e_i \in Z(M(A))$ $i=1,2,3)$,$M(A)e_1$は<u>finite type I</u>,$M(A)e_2=\{0\}$ or type II_1 $M(A)e_3$はproperly infiniteの形に分解できる。今$M(A)e_i=M_i$, $Ae_i=A_i$ $(i=1,2,3)$としよう。$e_2 \neq 0$とすればM_2はtype II_1 AW^*-algebraで,non-zero essential, separable two-sided ideal A_2をもつ。$\mathfrak{m}$をM_2のかってなmaximal two-sided idealとすれば$M_2/\mathfrak{m}$はAW^*-factor of type II_1である(一般論はBerberianのBaer$*$-ringの本にでている)$M_2/\mathfrak{m}$はnot separable且つsimpleより$A_2 \subset \mathfrak{m}$. M_2の"strong semi-simplicity"(F. B. Wright [15])によれば$A_2=\{0\}$しかしA_2がM_2でstrongly denseであるからこれは矛盾であり$e_2=0$である。さてM_3の場合,もし$e_3 \neq 0$ならば,M_3は<u>properly infinite</u>である。$\{\pi, H_\pi\}$をM_3のかってなirreducible representation

とすれば H_π は separable である ($\because$ $\pi(C^*(A_3, e_3))$ は strongly dense in $\pi(M_3)$) 従って, π は properly infinite σ-finite (by Lemma 3) AW*-algebra M_3 から σ-finite W*-algebra $\mathcal{B}(H_\pi)$ の中への *-homomorphism であるから Feldman, Fell の結果によれば ([6]) π は M_3 の projections 上 completely additive である。π はかってであったから M_3 が十分沢山の c.a. states をもつことになり従って M_3 は W*-algebra である ([11])。Lemma 3 より M_3 は type I atomic W*-algebra である。M_1 に関しては % の構造論から Lemma 4 により M_1 の center が atomic となる。

従って以上をまとめて $\exists\{H_m\}$: sequence of separable Hilbert spaces : $M(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}(H_m)$ である。A は separable two-sided ideal of $M(A)$ より 故には $A \subset \sum_{m=1}^{\infty}{}' C(H_m)$ ($\{C(H_m)\}$ の restricted direct sum) "as a C*-subalgebra" となり A は dual である。

注意. $M(A)$ が W*-algebra なら A が dual になることは [1] で証明された。

次に C*-algebra の "regular σ-completion closure" が今までの "universal weak closure" とか "weak closure" と大いに異なった点について若干述べて終りとしたい。

(1) C*-algebras (一応 separable は仮定する) A と B との間の surjective homomorphism は $\hat{A}$ onto $\hat{B}$ の surjective homomorphism に extend できるか? 答は一般に "no!" である。

前にも述べたが A を separable な infinite dimensional Hilbert space K 上に act する UHF-algebra とし, $B = A + C(K)$ とする。q を B onto $B/C(K)$ ($\cong A$ via a $*$-isomorphism ϕ) の canonical map とし, $\pi = \phi \circ q$ とすれば, π は B onto A の <u>surjective homomorphism</u> である。その regular σ-completion algebra $\hat{B} = B(K)$ で, $\hat{A}$ は non W^*, type III AW^*-factor である。我々は $\hat{B}$ onto $\hat{A}$ の如何なる $*$-homomorphism ももたないことがわかる。もしもそのような Φ があったとすれば, $\hat{B}$ は <u>σ-finite</u> properly infinite 且つ $\hat{A}$ は σ-finite であるから Feldman and Fell によれば, Φ は completely additive on projections of $\mathcal{B}(K)$ ($= \hat{B}$) で, $\Phi^{-1}(0)$ が closed two-sided ideal of $\mathcal{B}(K)$ に注意すると $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ or $\pi^{-1}(0) = C(K)$ である。もしも $\Phi^{-1}(0) = C(K)$ ならば $\Phi^{-1}(0)$ はすべての finite rank の projections を含み Φ が completely additive であり従って $1_K \in C(K)$ i.e. K が infinite dimensional に矛盾する。もし $\Phi^{-1}(0) = \{0\}$ ならやはり $\mathcal{B}(K)$ と $\hat{A}$ の性質に矛盾する。

(2) A, B any C^*-algebras で $A \subset B$ (as a C^*-subalgebra) とするとき, $\hat{A}$ は $\hat{B}$ の中に C^*-subalgebra として embed する事ができるか?

一般にはやはりできない。上の例を考えてみよう。$\hat{A}$ は σ-finite, non W^*, type III AW^* factor で, $\hat{B} \cong \mathcal{B}(K)$ with <u>separable</u> Hilbert space K である。もし $\hat{A}$ が $\mathcal{B}(K)$ ($= \hat{B}$) に C^*-subalgebra として

embedできたとすると、$\hat{A}$がnon-trivial separable representationをもつことになる。しかし$\hat{A}$は"very big" i.e. 如何なるnon-trivial separable representationをもたないので矛盾する。従って$\hat{A}$は$\hat{B}$にC*-subalgebraとしてはembedできない。

文献表.

[1] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama, Multipliers of C*-algebras, J. Functional Anal., 13(1973), 277-301.

[2] H. Behnke, F. Krauss and H. Leptin, C*-algebren mit geordneten Ideal Folgen, J. Functional Anal., 10(1972), 204-211.

[3] S.K. Berberian, Baer*-rings, Grundl. Math. Wiss., 195(1972), Springer, Berlin.

[4] J. Dixmier, Sur certains espaces considérés par M.H. Stone, Summa Brasil. Math., 11(1951), 151-182.

[5] __________, Les C*-algebres et leurs representations, Paris Gauthier-Villars, 1964.

[6] J. Feldman and J.M.G. Fell, separable representations of rings of operators, Ann. of Math., 65(1957), 241-249.

[7] H. Halpern, The maximal GCR-ideal in an AW*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 906-914.

[8] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53(1951), 235-249.

[9] Y. Misonou, On a weakly central operator algebras, Tôhoku Math. J., 4 (1952), 194–202.

[10] G. K. Pedersen, On weak and monotone closures of C^*-algebras, Comm. Math. Phys., 11 (1969), 221–226.

[11] ______________, Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 171–175.

[12] ______________, Applications of weak $*$- semi-continuity in C^*-algebra theory, Duke Math. J., 39 (1972), 431–450.

[13] K. Saitô, A non-commutative theory of integration for a semi-finite AW^*-algebra and a problem of Feldman, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 420–461.

[14] ______________, AW^* algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 31–40.

[15] F. B. Wright, A Reduction for algebras of finite type, Ann. of Math., 60 (1954), 560–570.

[16] J. D. M. Wright, Regular σ-completions of C^*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299–309.

[17] ______________, Wild AW^*-factors and Kaplansky-Richart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83–89.

[18] J. Vesterstrøm, On the homomorphic image of the center

of a C*-algebra, Math. Scand., 29 (1971), 134-136.

[19] E. Christensen, Non-commutative integration for monotone sequentially closed C*-algebras, Math. Scand., 31 (1972), 171-190.

[20] E. T. Kehlet, On the monotone sequential closure of a C*-algebra, Math. Scand., 25 (1969), 59-70.

以上