

Derivations on Unbounded Operator Algebras

福大 理 井上 淳
九大 理 太田昇一

1. 序論. C^* 環 (von Neumann 環) の非有界微分子が、近年多くの人々によって、研究され発展して来りました。この講演では、次のような問題に関連して、非有界作用素環上の微分子を考察します; すなわち, “ C^* 環における norm-closed な非有界微分子は、適当な表現によつて、Spatial になっているか?”。 M をある Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の von Neumann 環とし、 δ を M における $*$ -微分子とします。さらに、適当な Self-adjoint 作用素 H で $H\mathcal{D}(\delta) \subset \mathcal{D}(\delta)$ かつ $a \in \mathcal{D}(\delta) \subset \mathcal{D}(H)$ かつ $\delta(a) \xi = i[H, a] \xi$ for $a \in \mathcal{D}(\delta)$, $\xi \in \mathcal{D}(H)$ となっているものが存在するとし、我々は $\mathcal{D}(\delta)$ と H によつて生成される非有界作用素環上の微分子を構成することが出来る。逆に、特別な非有界作用素環 ($\exists W^*$ -環) 上の微分子が、その元によつて spatial になっているならば、ある von Neumann 環における δ -strongly

closed な微分子を構成することが出来ます。この立場から、非有界作用素環上の微分子を研究することにします。

2. 一般の $*$ -環上の微分子. まず初めに、非有界作用素環に関する定義を述べます。 \mathcal{D} を pre-Hilbert 空間 (その完備化を \mathcal{H}) とし、 \mathcal{D} 上の全ての linear operator を $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ と書くことにします。

$$\mathcal{L}^\#(\mathcal{D}) \equiv \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}); \exists A^\# \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) \text{ with}$$

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^\#\eta) \text{ for } \xi, \eta \in \mathcal{D}\}.$$

$\mathcal{L}^\#(\mathcal{D})$ は $A \rightarrow A^\#$ なる対合で $*$ -環になります。 $\mathcal{L}^\#(\mathcal{D})$ の $*$ -部分環を \mathcal{D} 上の $\#$ -環と呼ぶことにします。 \mathcal{A} を \mathcal{D} 上の $\#$ -環としたときに、 $\mathcal{A}_b \equiv \{A \in \mathcal{A}; \bar{A} \in B(\mathcal{H})\}$ (ただし、 $B(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} 上の有界線形作用素の全体とする) とし、 \mathcal{A} 上の identity operator を含む \mathcal{A} が、もし、 $\exists (1+A^\#A)^{-1} \in \mathcal{A}_b$ for $\forall A \in \mathcal{A}$ のとき symmetric と呼びます。 さらに、 $\bar{\mathcal{A}}_b$ が C^* -環 (W^* -環) なる symmetric $\#$ -環を $EC^\#$ -環 ($EW^\#$ -環) と呼ぶことにします。 次に $*$ -微分子の定義を述べます。 \mathcal{B} を一般の $*$ -環とします。 \mathcal{B} における線型写像 δ が $*$ -微分子であるとは、

(1) 定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ が $*$ -部分環である、

$$(2) \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), \quad \delta(A^*) = \delta(A)^*$$

for all $A, B \in \mathcal{D}(\delta)$

の条件(1)~(2)を満たすものである。特に、 $\#$ -環 \mathcal{A} 上の \ast -微分子 ($\mathcal{D}(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$) を $\#$ -微分子と呼ぶことにします。 $\#$ -環 \mathcal{A} 上の $\#$ -微分子 δ が、ある $H = H^\# \in \mathcal{A}$ によって

$$\delta(A) = i[H, A] (= i(HA - AH)) \quad \text{for } A \in \mathcal{A}$$

と書かれているとき、このような微分子を H によって *implement* される *spatial* 微分子と呼ぶことにします。

\mathbf{A} を単位元 e をもつ \ast -環とし、 f を \mathbf{A} 上の *positive linear functional* とする。 f による G - N - S 表現を $\{\pi_f, \lambda_f, \eta_f\}$ と書くと、 $\pi_f(\mathbf{A})$ は $\lambda_f(\mathbf{A})$ 上の $\#$ -環になる (対応は $\pi_f(a)^\# \equiv \pi_f(a^\#)$)。

命題: $\mathcal{L}^\#(\mathcal{D})$ 上の任意の $\#$ -微分子は *spatial* である。

f を \ast -環 \mathbf{A} 上の *positive linear functional* とする。

$$\mathcal{D}(\pi_f^\#) \equiv \bigcap_{a \in \mathbf{A}} \mathcal{D}(\pi_f(a)^\#) \quad \text{とし}$$

$$\pi_f^\#(a) \xi \equiv \pi_f(a^\#)^\# \xi \quad (a \in \mathbf{A}, \xi \in \mathcal{D}(\pi_f^\#))$$

と定義すると、 $\pi_f^\#$ は \mathbf{A} から $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\pi_f^\#))$ への *homomorphism* になる。

定理: δ を単位元 e をもつ \ast -環 \mathbf{A} 上の \ast -微分子とする。

f を \mathbf{A} 上の *positive linear functional* としたとき、次の(1)と(2)は同値である。

(1) $|\int(\delta(ba))|^2 \leq r_f \int(a^*a)$ for all $a, b \in A$, ここに、 r_f は b にのみ依存する定数である。

(2) ある linear operator $H \in \mathcal{L}(\lambda_f(A), \mathcal{D}(\pi_f^*))$ で次の条件(a)~(c)を満たすものが存在する；

(a) H は \mathcal{H}_f 上の symmetric operator,

(b) $(H\lambda_f(e) | \lambda_f(a)) = -(\lambda_f(a^*) | H\lambda_f(e))$ for $\forall a \in A$,

(c) $\delta_{\pi_f}(\pi_f(a))\lambda_f(b) (= \pi_f(\delta(a))\lambda_f(b))$
 $= i[H, \pi_f^*(a)]\lambda_f(b)$ for $\forall a, b \in A$.

3. Left EW[#]-環上の微分子.

\mathcal{A} を pre-Hilbert 空間とし、(その内積を $(\cdot | \cdot)$ によって示す) かつ $*$ -環であるとする。 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} の Hilbert Completion とする。 \mathcal{A} が次の条件を満たすとする；

(1) $(\xi | \eta) = (\eta^* | \xi^*)$ (2) $(\xi\eta | \zeta) = (\eta | \xi^*\zeta)$

for $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{A}$. このとき、各 $\xi \in \mathcal{A}$ に対して、

$\pi(\xi)\eta \equiv \xi\eta$ $\pi'(\xi)\eta = \eta\xi$ for $\eta \in \mathcal{A}$ で定義すると、

各 $\pi(\xi), \pi'(\xi)$ は $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ における closable operator になる。さ

らに(1)(2)の条件に、

(3) \mathcal{A}_0^2 が $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ において dense である

と仮定したとき、 \mathcal{A} を unbounded Hilbert 環 over \mathcal{A}_0 in $\mathcal{H}(\mathcal{A})$

と呼ぶことにする。ここに、 $\mathcal{A}_0 \equiv \{\xi \in \mathcal{A}; \overline{\pi(\xi)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathcal{A}))\}$

であるとする。このとき \mathcal{A}_0 は Hilbert 環でその Hilbert completion は $\mathcal{A}(\mathcal{A}_0) \equiv \mathcal{A}$ となる。

$\pi_0, (\pi_0')$ を \mathcal{A}_0 の left (right) regular 表現とする。さらに $\mathcal{U}_0(\mathcal{A}_0)$ を \mathcal{A}_0 の left von Neumann 環とし、 ϕ_0 を $\mathcal{U}_0(\mathcal{A}_0)^+$ 上の natural trace とする。

$$L_2^w(\phi_0) \equiv \bigcup_{2 \leq p < \infty} L^p \quad (L^p \equiv L^p(\phi_0))$$

$$L_2^w(\mathcal{A}_0) \equiv \{x \in \mathcal{A} ; \overline{\pi_0(x)} \in L_2^w(\phi_0)\}$$

と定義すると、 $L_2^w(\mathcal{A}_0)$ は unbounded Hilbert 環になる。 $L_2^w(\mathcal{A}_0)$ の left regular 表現を π_2^w とすると、 $L_2^w(\mathcal{A}_0)$ は $\pi_2^w(\mathcal{A}_0)$ と $\mathcal{U}_0(\mathcal{A}_0)$ のもとに不変であることがわかる。 $\pi_2^w(\mathcal{A}_0)$ と $\mathcal{U}_0(\mathcal{A}_0)$ を $L_2^w(\mathcal{A}_0)$ に制限した $\#$ -環により生成される $L_2^w(\mathcal{A}_0)$ 上の $\#$ -環を $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ と示し、それを left EW $^\#$ -環と呼ぶことにする。

\mathcal{M} を ϕ_0 に関する measurable operator 全体からなる集合とし、そこに strong product, strong sum により導入される strong commutator を次のように定義する；

$$[[A, B]] = A \cdot B - B \cdot A \quad \text{for } \forall A, B \in \mathcal{M}.$$

これらの記号のもとに、

定理: \mathcal{A} を unbounded Hilbert 環 over \mathcal{A}_0 in \mathcal{A} とし、 δ をその \mathcal{A} により作られる left EW $^\#$ -環 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上の $\#$ -微分子とする。もし δ が t_0 -連続で、 δ の値域が

$\pi_2^\omega(L_2^\omega(\mathcal{A}_0))$ に含まれるならば、各 p ($2 \leq p < +\infty$) に対して、 L^p に含まれるある self-adjoint operator H_p が存在して、

$$\delta(A)\xi = i \cdot \llbracket H_p, \bar{A} \rrbracket \xi$$

が $\forall A \in \mathcal{U}(\mathcal{A}), \xi \in L_2^\omega(\mathcal{A}_0)$

が成り立つ。

ここに、 t_s -連続とは、 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ に $\{P_\xi(A) = \|A\xi\|; \xi \in \mathcal{D}\}$ なる semi-norm の族によって生成される locally convex topology で連続ということである。

この講演では、以上を中心に述べるが詳しくは、次の preprint
 "Derivations on Algebras of Unbounded Operators by
 A. Inoue and S. Ôta" を参照して下さい。