数理解析研究所講究録
第356巻 1979年 46-54

ergodic 変換の normalizer の outer conjugacy

九大 教養　押川元重

1. von Neumann algebra およびその上の automorphism の理論と密接に関連した 測度空間上の変換の理論をのべる。測度空間上の変換に関する定義よりはじめる。

定義. σ有限測度空間(Ω, P)からσ有限測度空間(Ω', P')上への1対1で両可測な写像φが non-singularity property "$P(A)=0$ if and only if $P'(\varphi A)=0$" をみたすとき, isomorphism とよび, このときこれら2つの測度空間は isomorphic であるということにする。

定義. 実数直線Rおよびその上のルベーク測度からなる測度空間(R, du)と isomorphic なσ有限測度空間を Lebesgue space とよぶことにする。

定義. σ有限測度空間(Ω, P)からその上への isomorphism T を automorphism とよぶことにする。(Ω, P)上の automorphism からなる一径数群$\{T_s, -\infty<s<\infty\}$が

$T_t T_s = T_{t+s}$ をみたし，かつ $(\omega, s) \longrightarrow T_s\omega$ が可測写像であるとき，flow とよぶことにする。

定義．automorphism T（または flow $\{T_s\}$）が ergodic であるとは，T 不変可測関数：$f(T\omega) = f(\omega)$（$\{T_s\}$ 不変可測関数：$f(T_s\omega) = f(\omega)$）は定数関数に限ることである。

定義．automorphism T と T'（flow $\{T_s\}$ と $\{T_s'\}$）が同型であるとは，(Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $T'\varphi\omega = \varphi T\omega$（$T_s'\varphi\omega = \varphi T_s\omega$）をみたすものが存在することである。

2．ergodic 変換の弱同値．

定義．(Ω, P) 上の automorphism T について，$\{T^n\omega ; n \in Z\}$ を ω の T 軌道とよび，$\mathrm{Orb}_T(\omega)$ と表わすことにする。automorphism T と T' が弱同値であるとは，(Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で，$\varphi\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$ をみたすものが存在することである。

Lebesgue space (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して，直積空間 $(\Omega\times R, P\times du)$ 上の automorphism $\widetilde{T}$ を次のように定める。$\widetilde{T}(\omega, u) = (T\omega,\ u - \log\frac{dPT}{dP}(\omega))$．

このとき，$(\Omega\times R, P\times du)$ から Lebesgue space (X, m) 上への可測写像で次の(1),(2),(3)をみたすものが存在する．

(1) π は non-singular property をみたす。

(2) π は $\tilde{T}$ 不変である。すなわち $\pi\tilde{T}(\omega, u) = \pi(\omega, u)$

(3) $\tilde{T}$ 不変可測関数 $f(\omega, u)$ は $\pi(\omega, u)$ の関数とみなせる。

このような π は次の意味で一意に存在する。: π' および (X', m') を同様のものとすれば，(X, m) から (X', m') への isomorphism φ で $\varphi\pi\omega = \pi'\omega$ をみたすものが存在する。X は全ての $\tilde{T}$ ergodic 成分からなる空間とみなせばよい。

$(\Omega \times R, P \times du)$ 上の flow $T_s(\omega, u) = (\omega, u+s)$, $-\infty < s < \infty$ を考えると，$\{T_s\}$ は $\tilde{T}$ と可換であるから，($\{T_s\}$ の π による像として) X 上の ergodic flow $\{A_s\}$ で $A_s\pi(\omega, u) = \pi T_s(\omega, u)$ をみたすものが定まる。$\{A_s\}$ のことを T の associated flow とよぶことにする。これは ergodic automorphism の弱同値に関する不変量になっている。[4]

定義. ergodic automorphism T をその associated flow $\{A_s\}$ により次のように分類する。$\{A_s\}$ が R 上の translation : $u \longrightarrow u+s$ と同型のとき，T は II 型という。II 型でないときを III 型という。$\{A_s\}$ が区間 $[0, \log\frac{1}{\lambda})$ 上の translation : $u \longrightarrow u+s \mod (\log\frac{1}{\lambda})$ (ただし $0 < \lambda < 1$) と同型のとき，T は III_λ 型という。$\{A_s\}$ が一点集合上の trivial flow であるとき，T は III_1 型という。$\{A_s\}$ が非周期的かつ再帰的な ergodic flow であるとき，T は III_0 型という。

W. Krieger は associated flow が Lebesgue space 上の

III型の automorphism の弱同値類から Lebesgue space 上の再帰的な ergodic flow の同型類の上への1対1対応を与えることを示した。[6]

ここで von Neumann algebra の理論との関係をのべる。ergodic automorphism T から measure space construction によって factor M(T) がつくられる。Tの型はM(T)の型に対応しているし，Tの associated flow は Connes-Takesaki [3]の flow of weight に対応している。さらに Connes の結果（[1]等）によると，III_1型をのぞいた（未解決！）hyperfinite factor は Lebesgue space 上の ergodic automorphism からつくられる factor と *-isomorphic である。従って hyperfinite factor を考える限り ergodic automorphism からつくられた factor を考えれば充分ということになる。

3. normalizer の outer conjugacy.

<u>定義</u>. (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して，同じ測度空間上の automorphism R が $R\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_T(R\omega)$ をみたすとき，R を T の <u>normalizer</u> といい，T の normalizer の全体のなす群を $N[T]$ で表わすことにする。

<u>定義</u>. $R \in N[T]$ と $R' \in N[T']$ が <u>outer conjugate</u> であるとは (Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $\varphi\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$ かつ $\varphi R\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = R'\,\mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$

をみたすものが存在することである。

定義. $R \in N[T]$ および自然数 n について,
$R^i \mathrm{Orb}_T(\omega) \cap \mathrm{Orb}_T(\omega) = \phi \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$ かつ
$R^n \mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_T(\omega)$ をみたすとき, R は outer period n をもつという。またこのような n が存在しないとき, R は outer aperiodic であるという。T の outer period 1 の normalizer の全体を $[T]$ で表わし, $[T]$ の元を inner normalizer という。

(Ω, P) 上の $R \in N[T]$ に対して, $\Omega \times \mathbb{R}$ 上の automorphism $\widetilde{R}$: $\widetilde{R}(\omega, u) = (\omega, u - \log \frac{dPR}{dP}(\omega))$ を考える。$\widetilde{R}$ は $\widetilde{T}$ の normalizer になっていることより, ($\widetilde{R}$ の π による像として) X 上の automorphism ρ で $\rho\pi(\omega, u) = \pi\widetilde{R}(\omega, u)$ をみたすものが存在する。$\widetilde{R}$ と $\{T_s\}$ は可換だから, ρ と $\{A_s\}$ は可換である。ρ のことを mod R と表わすことにする。
normalizer の outer period と mod は outer conjugacy の不変量になっている。Connes-Krieger [2] はさらに III 型の場合について, これらが完全不変量であることを示した。

確率分布 $\{P_0, P_1\}$, $P_0+P_1=1$ を与えた 2 点集合 $\{0, 1\}$ の片側無限直積測度空間 $(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\{P_0, P_1\})$ 上で有限ヶの座標をかえることによってえられる automorphism の全体からなす群を $\Gamma(P_0, P_1)$ で表わすことにする。

定理〔5〕. 任意の ergodic automorphism T と任意の n に対して, T の normalizer R で mod R は恒等写像でかつ R の outer period が n となるものが存在する。

証明. $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\right)$ 上の変換 σ_n を次で定義する。

$(\sigma_n w)_i = w_{i+1}$ $(i=\ell n+1,\cdots,\ell n+\ell+1)$ $(\sigma_n w)_{\ell n} = w_{(\ell-1)n+1}$, $\ell=1,2,\cdots$.

σ_n は $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の normalizer でかつ outer period n である。Ω の恒等変換と σ_n の直積変換は $\{T'\}\times\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の normalizer で mod は恒等変換かつ outer period n である。$\{T'\}\times\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と T が弱同値であることから結論をえる。　　　証明終

N〔T〕に次のような位相を考える。$R_k\in N[T]$ が $k\to\infty$ で $R\in N[T]$ に収束するとは, $\lim_{k\to\infty} P(\omega; R_k^{-1}TR_k\omega \neq R^{-1}TR\omega)=0$ かつ R_k は R に弱収束すること, すなわち任意の可積分関数 $f(\omega)$ について, $\lim_{k\to\infty}\int\left|f(R_k\omega)\frac{dPR_k}{dP}(\omega)-f(R\omega)\frac{dPR}{dP}(\omega)\right|dP(\omega)=0$ がなりたつことである。

定理〔5〕 mod R が恒等写像であるための必要十分条件は R が〔T〕の閉包に属することである。

ergodic flow $\{T_s\}$ に対して, $\{T_s\}$ と可換な automorphism の全体のなす群を $C(T_s)$ で表わすことにする。$C(T_s)$ 上には弱収束の位相を考えることにする。

<u>定理</u>（Hamachi [t.a.]）III型の automorphism T について mod は $N[T]$ から $C(A_s)$ 上への写像であり，さらに $N[T]/[T]$ と $C(A_s)$ は位相をこめて同型である。

証明．定理の前半は II_∞, III_λ $(0<\lambda<1)$, III_1 型のときは [5] で証明されたが，III_0 型を含む一般の形では最近 Hamachi が与えた。ここでは Hamachi のものを少しかえた形で証明する。$\log\lambda$ と $\log\eta$ が rationally independent になるような正数 λ, η を考え，直積変換群 $\Gamma\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta}\right)$ を G で表わし，直積測度空間 $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}\times\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\}\times\prod_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta}\right\}\right)$ を (W, μ) で表わすことにする。このとき次が成りたつ。

(i) $\left\{g\in[G]\ ;\ \frac{d\mu g}{d\mu}(w)=1\right\}$ は ergodic である。

(ii) $\left\{\frac{d\mu g}{d\mu}(w)\ ;\ w\in W, g\in G\right\}=\{\lambda^n\eta^m\}$ は R で稠密である。

(iii) $g\in G$ に対して，$\tilde{g}(w,u)=\left(gw, u-\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)\right)$ で与えられる変換 $\tilde{g}$ の全体 $\tilde{G}$ は ergodic である。

Lebesgue space (X, m) 上の ergodic flow $\{T_s\}$ に対して，$(W\times W\times X\times R, \mu\times\mu\times m\times e^u du)$ 上の変換 (g,g') $(g,g'\in G)$ を

$$(g,g')(w,w',x,u)=\left(gw, g'w', T_{\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)}x, u-\log\frac{d\mu g'}{d\mu}(w')-\log\frac{dm\,T_{\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)}}{dm}(x)\right)$$

で定義し，(g,g') の全体のつくる群を $\mathfrak{J}$ で表わすことにする。$\pi(w,w',x,u,v)=T_v x$ でもって $W\times W\times X\times R\times R$ から X 上への写像 π を定義すれば，π は non-singular property をみたし，かつ π は $\tilde{\mathfrak{J}}$ 不変である。さらに $f(w,w',x,u,v)$ を $\tilde{\mathfrak{J}}$ 不変な関

数とすれば，$f(w\,g^{\prime}w^{\prime}, x, u-\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w^{\prime}), v) = f(w\,w, x, u, v)$ だから (iii) より $f(w.w^{\prime}, x, u, v) = f(w, x, v)$ と表わせる．$\frac{d\mu g}{d\mu}(w)=1$ をみたす $g \in [G]$ について，$f(gw, x, v) = f(w, x, v)$ だから (i) より，$f(w, x, v) = f(x, v)$ と表わせる。$f(T_{\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)}x, v-\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)) = f(x, v)$ だから (ii) より $f(T_s x, v-s) = f(x, v)$ が全ての s についてなりたつ。従って $f(x, v) = f(T_v x)$ と表わせる。

$U \in C(T_s)$ に対して，$R_U(w, w^{\prime}, x, u) = (w, w^{\prime}, Ux, u-\log\frac{dm U}{dm}(x))$ とすれば，$R_U \in N[\mathfrak{J}]$ かつ $\pi\tilde{R}_U(w, w^{\prime}, x, u, v) = T_v Ux = U\pi(w, w^{\prime}, x, u, v)$。以上より $\mathfrak{J}$ の associated flow は $\{T_s\}$ で，$\mathrm{mod}\, R_U = U$。$\mathfrak{J}$ は1つの ergodic automorphism からつくられる群と（弱同型の意味で）みなせるから結論を得る。　　　　証明終

この定理により $N[T]/[\tilde{T}]$ の構造を見るには $C(A_s)$ を調べればよいことになる。最近 Hamachi は次のような結果を得ている。

① $C(T_s)$ が compact になるための必要十分条件は $\{T_s\}$ が有限不変測度をもちかつ純点スペクトルをもつことである。従って $N[T]/[\tilde{T}]$ が compact になるための条件が T の associated flow $\{A_s\}$ の条件で与えられた。

② $C(T_s) = \{T_s\}$ をみたすような ergodic flow $\{T_s\}$ が存在

する。従って $N[T]/[T]$ が R と同型となるような T がある。
③ $C(T_s)$ が非可換群となるような ergodic flow $\{T_s\}$ が存在する。従って $N[T]/[T]$ が非可換群となるような T がある。

REFERENCES

1. CONNES, A. : Classification of Injective factors

2. CONNES, A., and KRIEGER, W. : Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness.
3. CONNES, A., and TAKESAKI, M. : The flow of weights of factors of type III. Tohoku Math. J. 29 (1977), 473-575.
4. HAMACHI, T., OKA, Y., and OSIKAWA, M. : Flows associated with Ergodic Non-singular transformation groups. Publ. RIMS 11 (1975), 31—50.
5. HAMACHI, T. and OSIKAWA, M : Fundamental homomorphism of normalizer group of ergodic transformation. (To appear in Springer Lecture notes, Proceeding of Conference on Ergodic Theory at Oberwolfach in 1978)
6. KRIEGER, W. : On ergodic flows and isomorphism of factors. Math. Ann. 223 (1976), 19-70.