数理解析研究所講究録
第 356 巻 1979 年 71-93

Inner amenable group と Group operator algebra

大阪教育大　　長田まりゑ

II_1-factor は von Neumann による Property Γ によって，大ざっぱに，二つの類に分けられる。Property Γ をもつ II_1-factor の類は，II_1-factor の中で重要な役割を占める hyperfinite factor を含む。II_1-factor が property Γ をもたないことは，Connes [8] の定義による full であることと同値である。ここでは先づ property Γ（及び fullness）は，有限操作のもとでは，不変な性質であることを示す。所が，hyperfiniteness と異なり，操作が無限になると，最も単純な（すなわち cyclic な）操作に関しても，もはや不変であり得ないことを，例をあげて示す。

II_1-factor の代表的な例は，infinite discrete countable ICC group G の left regular 表現 λ に対し，$\lambda(G)$ の生成する von Neumann algebra $R(G)$ で与えられている。重要な群の例は，自然数上の有限置換全体のなす群 Π と，二つの

生成元をもつ自由群 F_2 である。$R(\Pi)$ は hyperfinite factor であり，$R(F_2)$ は full factor である。1976年に，Connes [9] は，II_1-factor の hyperfiniteness は，富山 [22] による extension property をもつことと同値であることを示し，$R(G)$ の hyperfiniteness と群 G の amenability の同値性を示した。Effros [11] は，群 G に，amenability をゆるめた，inner amenability を定義し，$R(G)$ が property Γ をもつならば，G は inner amenable である事を示した。ここでは，群 G が amenable である事は，$B(\ell^2(G))$ 上の state φ で，$\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$ $(g \in G,\ x \in B(\ell^2(G)))$ となるものが存在する事と同値である事を示し，G の inner amenability を $R(G)$ 及び state との関係で述べる。

次に，群 G と $\lambda(G)$ の生成する C^*-algebra $C^*_r(G)$ との関係について考える。G が amenable である事は，$C^*_r(G)$ が character を持つことと同値となる。F_2 は，inner amenable でない群の代表例であるが，Powers [16] の結果より，$C^*_r(F_2)$ は simple で tracial state を唯一つしか持たない。そこで，群の inner amenability と $C^*_r(G)$ の simplicity 及び tracial state の唯一性との関連が一つの問題として，考えられる。これらは，互いに独立な性質であるという例を示す。

以下，N を canonical trace τ をもつ II_1-factor，$\mathcal{U}$ を

Dixmier [10], Segal [20] による Hilbert space $L^2(N,\tau)$ とする。すると，N は $\mathfrak{H}$ 上で standard に act している。N の中の任意有限個の元 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，N のユニタリ u が存在して，$\tau(u) = 0$ かつ $\|x_j u - u x_j\|_2 < \varepsilon$ $(1 \leqq j \leqq n)$ を充すとき，N は property Γ をもつという，ただし，$x \in N$ に対して，$\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$ である。Aut N 及び Int N をそれぞれ N の automorphism 全体及び inner automorphism 全体とする。一般の factor M の Aut M に対して，M_* での各点 norm 収束の位相を導入したとき，Int M が閉部分群をなしているならば，M は full であるという[8]。この位相は II_1-factor N の Aut N に対しては，各点毎の $\|\ \|_2$ -収束による位相と一致する。N が full であることと，N が property Γ をもたないことは [8] 及び [19] によって同値である。$(x_k)_k$ を N の bounded sequence とする。このとき，$(x_k)_k$ が central sequence であるとは，$\|x_k y - y x_k\|_2 \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 0$ が，すべての $y \in N$ に対して成立することとする。また，central sequence $(x_k)_k$ が trivial であるとは，$(x_k)_k$ に対して，複素数の sequence $(\mu_k)_k$ が存在して，$\|x_k - \mu_k\|_2 \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 0$ を充すことである。すると N が property Γ をもつことと，N が non-trivial な central sequence をもつこととは同値である[10']。

<u>Full II_1-factor の outer automorphism group による crossed</u>

product.

von Neumann 環の理論において, tensor product 及び crossed product は, しばしば有効な手段として, 用いられる。そこで, fullness (したがって property Γ) の, それらの product のもとでの, 不変性について, 考えてみる。Connes [8] 及び McDuff [13] は, II_1-factor N, M に対して, その tensor product $N \otimes M$ が full である為の必要十分条件は, N と M が共に full であることを示した(必要条件については, 御園生 [14] も示している)。 前田・境 [18] は, N がどのような II_1-factor であっても, infinite tensor product $\bigotimes_{i=1}^{\infty} N_i$ ($N_i = N, \forall i$) は常に property Γ を持つ事を示した。従って, fullness は, 有限 tensor product のもとでは, 必らず不変であるが, 巡回無限 tensor product のもとでは, 不変であり得ないことになる。ここでは, crossed product に関しても, 同様な結果が成立することを示す。

<u>補題 1</u>　II_1-factor N が full であることと, N 上の $n \times n$-matrix algebra $M_n(N)$ が full であることとは, 同値である。

<u>証明</u>　$(x_k)_k$ を $M_n(N)$ の bounded sequence とする。x_k の (i, j)-要素を $x_k(i, j)$ とする。$(x_k)_k$ が central sequence であることは, $x_k(i, j)$ が $i \neq j$ ならば 0 に strongly に収束し,

かつ $x_k(i,i)$ は N の central sequence である事と同値である。従って，N が non-trivial な central sequence をもつ事と，$M_n(N)$ が non-trivial な central sequence をもつ事は同値となる。//

G を von Neumann 環 N の automorphism のなす可算な，discrete group とする。π を N の $l^2(G, \mathcal{H})$ 上への表現；

$$(\pi(x)\xi)(g) = g^{-1}(x)\xi(g), \quad (g \in G,\ x \in N,\ \xi \in l^2(G, \mathcal{H}))$$

とし，λ を G の $l^2(G, \mathcal{H})$ 上への表現；

$$(\lambda_h \xi)(g) = \xi(h^{-1}g), \quad (h, g \in G,\ \xi \in l^2(G, \mathcal{H}))$$

とする。$\pi(N)$ と $\lambda(G)$ の生成する $l^2(G, \mathcal{H})$ 上の von Neumann 環を，N の G による crossed product といい，$G \otimes N$ で示す。

<u>定理2</u> N を separable な predual をもつ II_1-factor，G を N の outer automorphism のなす有限群とするとき，次の (1), (2), (3) は，同値である；

(1) N が full である。

(2) $G \otimes N$ が full である。

(3) $N^G = \{x \in N;\ g(x) = x \quad \forall g \in G\}$ が full である。

<u>証明</u> II_1-factor N の outer automorphism のなす有限群 G に対して，$G \otimes N$ 及び N^G は II_1-factor である [15]。

(1) ⇒ (2)： $G \otimes N$ の central sequence はすべて trivial である事をいう。$(x_k)_k$ を $G \otimes N$ の central sequence とする。各 x_k は，$x_k = \sum_{g \in G} x_k(g)\lambda_g$，$(x_k(g) \in \pi(N))$ なる形で，

一意的に展開される。$\pi(N)$ 上の λ_g で induce される automorphism を又同じ g で表わすことにする。$(x_k)_k$ が central sequence だから，すべての $a\in\pi(N)$ に対して，

$$\|x_k a - a x_k\|_2^2 = \sum_{g\in G}\|x_k(g)g(a) - a x_k(g)\|_2^2 \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0 .$$

従って，$\|x_k(g)\,g(a) - a\,x_k(g)\|_2^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ がすべての $a\in\pi(N)$ と $g\in G$ に対して成立する。$g\neq 1$ ならば，g は $\pi(N)$ の outer automorphism である。所で $\pi(N)$ は，full だから，outer automorphism $g(\neq 1)$ は，$\mathrm{Int}\,N$ の closure に属さない。従って，[9 : 定理 3. 1] によって，$(x_k(g))_k$ は $g\neq 1$ なかぎり，0 に strongly に収束する。$g=1$ に対しては，上式は $(x_k(1))_k$ が $\pi(N)$ の central sequence であることを示す。$\pi(N)$ は full だから，$(x_k(1))_k$ は trivial でなければならない。従って，複素数の sequence $(\mu_k)_k$ で $\|x_k(1)-\mu_k\|_2 \underset{k\to\infty}{\to} 0$ となるものが，存在する。$\|x_k-\mu_k\|_2^2 = \sum_{g\in G}\|x_k(g)\|^2 + \|x_k(1)-\mu_k\|_2^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$，より $(x_k)_k$ は trivial である。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : [2 : 定理 1] より，G の位数を n とすると，$G\otimes N$ は N^G 上の $n\times n$ - matrix algebra と同型である。従って，補題 1 により，(2) と (3) は同値である。

(2) $\Rightarrow$ (1) : N が property T をもてば，$G\otimes N$ が property T をもつことを示す。[9 : 定理 2. 1] により，II_1-factor B が property T をもつ為の必要十分条件は，任意の finitely

generated な inner automorphism group K に対して，B 上の K-invariant な non-normal state が，存在することである。B のすべての元は，B の中のユニタリの一次結合であらわされるから，B が property T をもつことは，B の中の任意の有限集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して，$\varphi(x_i y) = \varphi(y x_i)$ $(y \in B)$ が成立つ B 上の non-normal state φ が存在することと同値である。

N が property T をもつとする。$G \otimes N$ の中の有限集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ をとってくる。各 x_j の展開を $x_j = \sum_{g \in G} x_j(g) \lambda_g$ $(x_j(g) \in \pi(N))$ とする。φ を $\pi(N)$ 上の non-normal state で，

$$\varphi(x_j(g)\, y) = \varphi(y\, x_j(g)), \quad (y \in \pi(N),\ g \in G,\ j = 1, 2, \ldots, m)$$

を充たすものとする。$\psi(y) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \varphi(g(y))$, $(y \in \pi(N))$, とおくと，ψ は $\pi(N)$ 上の state で，

$$\psi(g(y)) = \psi(y) \quad \text{かつ} \quad \psi(x_j(g)\, y) = \psi(y\, x_j(g)) \quad (g \in G,\ y \in \pi(N),\ 1 \le j \le m)$$

を充す。この ψ を $G \otimes N$ 上に，$\psi(x) = \psi(x(1))$ によって拡張し，拡張された state を，同じ ψ で表わす。すると x_j $(1 \le j \le m)$ と，$x \in G \otimes N$ に対して，

$$\begin{aligned} \psi(x_j x) &= \sum_{g \in G} \psi(x_j(g)\, g(x(g^{-1}))) = \sum_{g \in G} \psi(g(x_j(g^{-1})\, x(g))) \\ &= \sum_{g \in G} \psi(x(g)\, g(x_j(g^{-1}))) = \psi(x\, x_j). \end{aligned}$$

もし ψ が $G \otimes N$ 上で normal だと仮定すると，ψ は $\pi(N)$ 上で，normal である。よって，$\{x_\alpha\}_\alpha$ を $\pi(N)$ の中の positive な元

の net で $x_\alpha \downarrow 0$ なるものとすると, $\psi(x_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\varphi(g(x_\alpha))\downarrow 0$ となり, $\varphi(x_\alpha)\downarrow 0$ となる。これは φ が $\pi(N)$ 上で non-normal なることに反する。従って, ψ は $G\otimes N$ 上の non-normal state で $\psi(x_j x) = \psi(x x_j)$ $(x\in G\otimes N,\ 1\leq j\leq m)$ を充す。故に $G\otimes N$ は property Γ をもつ。//

注　もし群 G が有限でなければ, 定理2の内容は, cyclic group に対しても, もはや成立しない。その例として, $R(F_2)$ 上の次の様な automorphism α を考える。$R(F_2)$ の元は, $x = \sum_{g\in F_2} x(g)\lambda_g$ (x_g: 複素数, λ は F_2 の left regular 表現) と σ-strong 位相のもとで展開される。γ を 2π を法として無理数とし, $\mu = e^{i\gamma}$ とおく。F_2 の元 g を reduced word で表わしたときの各 component の巾の和を $o(g)$ とする。(例えば a, b を F_2 の generator としたとき, $a^{n(1)}b^{n(2)}\cdots a^{n(k)} = g$ に対する $o(g)$ は $\sum_{j=1}^{k} n(j)$ である)。$R(F_2)$ の automorphism α を, $\alpha(x) = \sum_{g\in F_2} x(g)\mu^{o(g)}\lambda_g$ とおくと, すべての整数 j に対して, α^j は $R(F_2)$ の outer automorphism である [4, 補題1]。α の生成する群を G とすると $R(F_2)^G$ は $R(F_\infty)$ と同型となり $R(F_2)$ 及び $R(F_\infty)$ は共に full であるが $G\otimes R(F_2)$ は property Γ をもつ [6: 注意4]。

群の inner amenability と group factor の性質

G を discrete countably infinite ICC group (すなわち,

$G \ni g \neq 1$ ならば，$C_g = \{hgh^{-1} : h \in G\}$ は無限集合）とする。δ_g を g で 1，他で 0 の値をとる G 上の関数とする。$R(G)$ は，$\tau(x) = \langle x\delta_1, \delta_1 \rangle$ $(x \in R(G))$ で定義される faithful normal trace τ をもつ II_1-factor である。$l^\infty(G)$ を G 上の bounded sequence 全体とする。G の left regular 表現 λ と同じ記号 λ_g でもって，$l^\infty(G)$ 上の isometry $\lambda_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$ $(h \in G,$ $f \in l^\infty(G))$ を表わす。A_g によって，$l^2(G)$ 及び $l^\infty(G)$ 上の

$A_g f(h) = f(ghg^{-1})$ $(g, h \in G)$ なる isometry を表わす。

G が amenable であるとは，$l^\infty(G)$ 上の state σ で，$\sigma(\lambda_g f) = \sigma(f)$，$(g \in G,$ $f \in l^\infty(G))$ なるものが存在することである。それに対し，Effros は，G の inner amenability を次のように定義した[11]。G が inner amenable であるとは，$l^\infty(G)$ 上の state φ で $\varphi(A_g f) = \varphi(f)$ $(g \in G,$ $f \in l^\infty(G))$ かつ $\varphi(\delta_1) \neq 1$ となるものが存在することである。Amenable group は，inner amenable であり，F_2 は inner amenable でない。$\Pi \times F_2$ は amenable でない inner amenable group である。Connes[9] による II_1-factor の hyperfiniteness の特徴付け，及び $R(G)$ の hyperfiniteness と G の amenability の同値性を用いると，次のような G の amenability についての特徴付けを行うことができる。

<u>定理 3</u>　G を discrete countably infinite Icc 群と

する。G が amenable である為の必要十分条件は，$B(\ell^2(G))$ 上の state φ で $\varphi(x\lambda_g)=\varphi(\lambda_g x)$ $(g\in G,\ x\in B(\ell^2(G)))$ となるものが存在することである。

証明　G が amenable であることと $R(G)$ が hyperfinite であることとは同値 [9：系 7.2] であり，II_1-factor が hyperfinite であることは，hypertrace をもつことと同値である [9：定理 5.1]。従って，G が amenable であることと $B(\ell^2(G))$ 上の state φ で $\varphi(xy)=\varphi(yx)$ $(x\in B(\ell^2(G)),\ y\in R(G))$ を充すものが存在することと同値である。G が amenable と仮定すると，$\varphi(x\lambda_g)=\varphi(\lambda_g x)$ $(x\in B(\ell^2(G)),\ g\in G)$ なる $B(\ell^2(G))$ 上の state φ はこのようにして存在する。逆に，$\varphi(x\lambda_g)=\varphi(\lambda_g x)$ $(g\in G,\ x\in B(\ell^2(G)))$ を充す $B(\ell^2(G))$ 上の state φ が存在するとする。α を $\ell^\infty(G)$ の $B(\ell^2(G))$ への表現；$\alpha(f)\xi(h)=f(h)\xi(h)$ $(\xi\in\ell^2(G),\ h\in G)$ とすると，$\varphi\circ\alpha$ は

$$\varphi(\alpha(f))=\varphi(\lambda_g\alpha(f)\lambda_g^*)=\varphi(\alpha(\lambda_g f))\quad(g\in G,\ f\in\ell^\infty(G))$$

を充す。従って，G は amenable である。//

この定理３の関係と inner amenability に対して考えると次のようになる。

定理４　G を discrete countably infinite ICC group とする。G が inner amenable である為の必要十分条件は，$R(G)$ 上の non-normal state φ で $\varphi(\lambda_g x)=\varphi(x\lambda_g)$ $(g\in G,\ x\in R(G))$

を充すものが存在することである。

定理4の証明の前に，少し準備をする。ω を自然数上の，free ultrafilter とする。II_1-factor N の bounded sequence 全体のなす von Neumann algebra $\prod_1^\infty N_k$ に対し，$\tau_\omega((x_k)_k) = \lim_{k\to\omega} \tau(x_k)$ なる trace τ_ω の 0-ideal による quotient algebra を N^ω とかく。N^ω は canonical trace τ_ω をもつ II_1-factor である。以下 N を自然なうめこみにより N^ω の sub-factor とみなす。

<u>補題5</u>　II_1-factor N が property Γ をもつ為の必要十分条件は，N の N^ω における relative commutant $N'\cap N^\omega$ が scalar でない operator を含むことである。

<u>証明</u>　N が property Γ をもつことと N の non-trivial な central sequence の存在することとは，同値である[10: prop. 1.10]。N が property Γ をもたないとする。$N'\cap N^\omega$ の元 z に対し $(z_k)_k$ をその representative sequence とする。$(y_k)_k$ を operator norm に関する N の単位球の中の $\|\ \|$-dense な sequence とする。すると各 k に対し，$\| z_{n_k} y_j - y_j z_{n_k} \|_2 < \frac{1}{k}$ $(1 \leq j \leq k)$ となる番号 n_k が存在する。$(z_{n_k})_k$ は明らかに，N の central sequence である。従って，仮定より，$\lim_{k\to\omega} \| z_{n_k} - \tau(z_{n_k}) \|_2 = 0$。故に $N'\cap N^\omega$ はスカラーのみとなる。逆に，N が property Γ をもつとする。$(x_n)_n$ を N の central sequence で，

$\|x_n - \tau(x_n)\|_2$ が 0 に収束しないものとする。すると正の数 α と $(x_n)_n$ の subsequence $(x_{n_k})_k$ で $\|x_{n_k} - \tau(x_{n_k})\|_2 > \alpha$ $(\forall k)$ となるものが存在する。$(x_{n_k})_k$ が代表する $N' \cap N^\omega$ の元はスカラーではない。//

ここにおけるいくつかの証明の方法は [9] における手法の modification である。

<u>補題6</u> II_1-factor N が property Γ をもてば，$N' \cap N^\omega$ は，無限次元である。

<u>証明</u> 補題5により，N が property Γ をもつと，$N' \cap N^\omega$ は N には含まれない。従って，$x \in N' \cap N^\omega$ $(\|x\| = 1)$ で N に含まれないものが存在する。$(x_k)_k$ を x の representative sequence とすると，$\lim_{k \to \omega} \|x_k - y\|_2 \neq 0$ $(\forall y \in N)$。N の operator norm に関する単位球は N_1 は，$\|\cdot\|_2$ に関してコンパクトであるから，$\lim_{k \to \omega} \|x_k - y\|_2 > \alpha$ $(y \in N_1)$ をみたす正の数 α が存在する。$(y_k)_k$ を N_1 での $\|\ \|_2$-dense な sequence とする。各 k に対して，次のような $U_k \in \omega$ をとる；
$\|y_j x_n - x_n y_j\|_2 < 1/k$ $(1 \leq j \leq k,\ n \in U_k)$。各 ℓ に対して，$(x_k)_k$ の subsequence $(x^\ell_k)_k$ で $\|y_j x^\ell_k - x^\ell_k y_j\|_2 < 1/k$ $(1 \leqq j \leqq k)$ かつ $\|x^\ell_k - x^m_k\|_2 > \alpha$ $(\ell < m)$ を充すものがとれる。$(x^\ell_k)_k$ を representative sequence とする N^ω の元を z_ℓ とすると，$(y_j)_j$ が N_1 で $\|\cdot\|_2$-dense であることよ

り，z_ℓ は $N'\cap N^\omega$ に属する。一方，次の不等式が成立する：

$$\|z_\ell - z_m\|_2 = \lim_{k\to\omega}\|x_k^\ell - x_k^m\|_2 > \alpha, \quad (\ell \neq m)。$$

$N'\cap N^\omega$ が有限次元とすると，$N'\cap N^\omega$ の $\|\cdot\|_2$ に関する単位球はコンパクトである。$\|x\|=1$ より $\|z_\ell\|\leq 1$ だから，上のような無限点列 $(z_\ell)_\ell$ 及び α の存在はコンパクト性に反する。故に，$N'\cap N^\omega$ は無限次元である。//

<u>補題7</u>　II_1-factor N が property Γ をもつならば，N のユニタリの任意の可算集合 $(u_j)_j$ に対して，N 上の non-normal state φ が存在して，$\varphi(u_j x) = \varphi(x u_j)$　$(x\in N, {}^\forall j)$ を充す。

<u>証明</u>　N が property Γ をもつとする。補題6より，$N'\cap N^\omega$ は無限次元の von Neumann algebra で；normal finite trace τ_ω をもつ。従って，$N'\cap N^\omega$ は無限次元の abelian von Neumann algebra を含むから，各 k に対して，$\tau_\omega(e_k) < 1/k$ となるような projection $0\neq e_k\in N'\cap N^\omega$ が存在する。$(f^k_n)_n$ を N の projection からなる e_k の representative sequence とする。$\|e_k\|_2 > \varepsilon' > 0$ なる任意の ε' に対して，$u_j e_k = e_k u_j$ より $V'(j,k)\in\omega$ が存在して，$\|f^k_n u_j - u_j f^k_n\|_2 < (\|e_k\|_2 - \varepsilon')/2k$ が全ての $n\in V'(j,k)$ に対して成立する。他方 τ_ω の定義より，$V_k''\in\omega$ が存在して，$|\|e_k\|_2 - \|f^k_n\|_2| < \varepsilon'$ が全ての $n\in V_k''$ に対して成立する。又 $V_k\in\omega$ で $\tau(f^k_m) < 1/k$ を全ての $m\in V_k$ に

に対して充すものも存在する。各 k に対して，$\bigcap_{j=1}^{k} V'(j,k) \cap V''_k \cap V_k$ の中の自然数 m をとり，$f_k = f^k_m$ とおくと，f_k は，

$$\tau(f_k) < 1/k, \quad f_k \neq 0, \quad \| f_k u_j - u_j f_k \|_2 < \| f_k \|_2 / 2k$$

をすべての $j\ (=1, 2, \ldots, k)$ に対して満足する。N 上の normal state φ_k を $\varphi_k(x) = \tau(f_k x) / \tau(f_k)$ $(x \in N)$ で定義する。$(f_k)_k$ は σ-strongly に 0 に収束するのに，$\phi_k(f_k) = 1$ なることより，[1：定理 2. 3] より，集合 $(\varphi_k)_k$ は N_* で weakly relatively compact でない。従って，N^* における集合 $(\varphi_k)_k$ の weak closure に属する non-normal state φ が存在する。各 $x \in N$，j と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，自然数 k で $k \geq \max(j, 3\|x\|/\varepsilon)$ かつ

$$|\varphi(u_j x u_j^*) - \varphi_k(u_j x u_j^*)| < \varepsilon/3, \quad |\varphi(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon/3$$

を充すものをとる。すると任意の k と j に対し，

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(u_j x u_j^*) - \varphi_k(x)| &= |\tau(f_k u_j x u_j^*) - \tau(f_k x)| / \tau(f_k) \\
&\leq \| u_j^* f_k u_j - f_k \|_1 \|x\| / \tau(f_k) \\
&\leq 2 \| u_j^* f_k u_j - f_k \|_2 \| f_k \|_2^2 / \tau(f_k) \qquad [9 : \textit{Prop. } 1.2.1] \\
&\leq \|x\| / k
\end{aligned}$$

が成立つことより，non-normal (N 上で) な state φ は $\varphi(u_j x u_j^*) = \varphi(x)$ $(x \in N,\ j = 1, 2, \ldots)$ をみたす。//

$R(G)$ は $\ell^2(G)$ 上で standard に act している。従って，$\ell^2(G)$ の各元子は，$R(G)$ に関して strongly dense な domain をも

て，$R(G)$に affiliate している closed operator とみなすことができる[20]。以下 $l^2(G)$の元ξに対し，$|\xi|$は operator としての絶対値を表わすことにする。

<u>定理4の証明</u> [11：定理]より，Gが inner amenable である為の必要十分条件は，次の条件(☆)を充す sequence $(\xi_k)_k$ が $l^2(G)$の中に存在することである；

(☆) $\|\xi_k\|_2 = 1$, $\xi_k(1) = 0$ かつ $\|A(g)\xi_k - \xi_k\|_2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\forall g \in G)$.

Gが inner amenable とし，2つの場合に分けることにより、求めるような state の存在を示す。

場合(1)；上記の sequence $(\xi_k)_k$が[9：命題1.3.1]における次の条件(*)を充す場合；

(*) 任意の$\varepsilon > 0$に対し，正の実数aで
$\lim_{k\to\omega} \| E_a(|\xi_k|)\cdot|\xi_k| \|_2 < \varepsilon$ を充すものが存在する，

ただし，E_aは$(a, +\infty)$の特性函数である。このとき，$(\xi_k)_k$を代表元とするξは[9：命題1.3.1]により，N^ωに affiliate する closed operator である。sequence $(\xi_k)_k$の性質により，ξは$\xi\lambda_g = \lambda_g\xi$ $(g\in G)$を充すスカラーではない operator である。各正の実数bに対して，$x(b) = \xi - \xi E_b(|\xi|)$とおくと，$x(b) \in R(G)' \cap R(G)^\omega$で$b$を十分大きくすると$x(b)$は，$\sigma$-strongly に$\xi$に収束する。もし$R(G)' \cap R(G)^\omega = \mathbb{C}\cdot 1$ならば，$x(b)$はスカラーでなければならないが，これは$\xi$が

スカラーでないことに反する。従って，$R(G)'\cap R(G)^{\omega} \neq \mathbb{C}\cdot 1$。故に補題5により $R(G)$ は property Γ をもつ。G が可算より，$\{\lambda_g : g\in G\}$ は可算な $R(G)$ のユニタリの集合だから，補題7より $R(G)$ 上の non-normal state φ が存在して，$\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$ $(g\in G,\ x\in R(G))$ を充す。

場合(2)：上の $(\xi_k)_k$ が(*)を充さない場合：実数 α が存在して，任意の正の実数 a に対して $\lim_{k\to\omega}\|E_a(|\xi_k|)\cdot|\xi_k|\|_2 \geq \alpha$ を充す。各 k に対して，$U_k\in\omega$ をとり，$\|E_{\sqrt{k}}(|\xi_k|)\,|\xi_k|\|_2 \geq \alpha$ が，すべての $n\in U_k$ に対して成立するようにする。$U_k \ni n_k$ をとり，$\eta_k = \xi_{n(k)}$ とおくと，すべての k に対して，

$$\tau(E_k(|\eta_k|^2)|\eta_k|^2)^{1/2} = \|E_{\sqrt{k}}(|\eta_k|)|\eta_k|\|_2 > \alpha$$

が成立つ。$R(G)$ 上の normal state φ_k を $\varphi_k(x)=\tau(|\eta_k|^2x)$ $(x\in R(G))$ によって定義する。projection の sequence $(E_k|\eta_k|^2)_k$ は $\tau(E_k|\eta_k|^2)\leqq \tau(E_k(|\eta_k|^2)|\eta_k|^2)/k \leqq 1/k$ より，σ-strongly に0に収束する。一方

$$\varphi_k(E_k|\eta_k|^2) = \tau(|\eta_k|^2E_k(|\eta_k|^2)) \geqq \alpha^2 \quad (\forall k)$$

だから，[1：定理2.3]より集合 $(\varphi_k)_k$ は $R(G)_*$ で weakly relatively compact でない。従って，集合 $(\varphi_k)_k$ の $R(G)^*$ における weak closure に $R(G)$ 上の non-normal state φ が存在する。φ_k は

$$|\varphi_k(\lambda_g x\lambda_g^*) - \varphi_k(x)| = |\tau(\lambda_g^*|\eta_k|^2\lambda_g x - |\eta_k|^2 x)|$$

$\leqq \|x\| \, \|\lambda_g |\eta_k|^2 \lambda_g^* - |\eta_k|^2\|_1$

$\leqq 2\|x\| \, \|\lambda_g \eta_k \lambda_g^* - \eta_k\|_2 \, \|\eta_k\|_2$ 　　[9：命題 1.2.1]

$= 2\|x\| \, \|\lambda_g \eta_k \lambda_g^* - \eta_k\|_2$

を充すことより、state φ は $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$ $(g \in G,\ x \in R(G))$ を充す。従って，G が inner amenable ならば，$R(G)$ 上の nonnormal state φ で，$\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$ $(g \in G,\ x \in R(G))$ を充すものが存在する。

逆に，$R(G)$ 上の nonnormal state φ で $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$ $(g \in G,\ x \in R(G))$ を充すものが存在したとする。$R(G)$ は factor だから，φ は singular である。故に [21；定理] により，$0 < \varepsilon < 1/4$ なる ε に対して，projection $e \in R(G)$ が存在して，$\varphi(e) = 1$ かつ $\tau(e) < \varepsilon$ とできる。S を $\psi(e) > 1 - \varepsilon$ なる $R(G)$ 上の state ψ の集合とする。暫らく自然数 m を固定する。$(N^*)^m$ を N^m の dual とみなす。G が可算だから $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ とおき，α_i を $\alpha_i(x) = \lambda_{g_i} x \lambda_{g_i}^*$ $(x \in R(G))$ なる inner automorphism とし，

$$W = \{(\psi - \psi\cdot\alpha_1, \cdots\cdots, \psi - \psi\cdot\alpha_m) \in N^{m*};\ \psi \in S \cap N_*\}$$

とおく。state φ は $S \cap N_*$ の $\sigma(N^*, N)$ − closure に属する。従って，$(\varphi - \varphi\cdot\alpha_1, \cdots\cdots, \varphi - \varphi\cdot\alpha_m) = 0$ は W の $\sigma(N^{*m}, N^m)$ − closure に属する。故に，W の $\sigma(N_*^m, N_*^{m*})$ − closure は 0 を含むが，W は convex だから W の $N^m{}_*$ における$\|\ \|$.

ム closure に 0 が含まれる。故に $S \cap N_*$ の state ψ_m で、

$\| \psi_m - \psi_m \cdot \alpha_j \| < 1/m \quad (1 \leq j \leq m)$ なるものが存在する。ξ_m

を $l^2(G)$ の元で、$\psi_m(x) = \tau(\xi_m^2 x) \quad (x \in R(G))$ なる positive

operator とする。すると $\|\xi_m\|_2 = 1$ かつ

$$\| A_{g_j} \xi_m - \xi_m \|_2 \leq \| A_{g_j} \xi_m^2 - \xi_m^2 \|_1^{1/2} \quad [9 : 命題 1.2.1]$$

$$= \| \psi_m \cdot \alpha_j - \psi_m \|^{1/2} < 1/m, \quad (1 \leq j \leq m)$$

が成立つ。従ってこのような ξ_m の sequence を考えると、

$\|\xi_m\|_2 = 1$ かつ $\| A_{g_j} \xi_m - \xi_m \|_2 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \quad (\forall g_j \in G)$ を充す。

もし $|\xi_m(1)| \xrightarrow[m \to \infty]{} 1$ とすると、自然数 n で $\| \xi_n - \xi_n(1) \delta_1 \|_2$

$< \varepsilon$ となるものが存在する。すると、

$$| \psi_n(e) - |\xi_n(1)|^2 \tau(e) | = | \langle e \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \xi_n(1) e \delta_1, \xi_n(1) \delta_1 \rangle |$$

$$\leq \|\xi_n\|_2 \| e(\xi_n - \xi_n(1)\delta_1) \|_2 + |\xi_n(1)| \cdot \| e \delta_1 \|_2 \cdot \| \xi_n - \xi_n(1) \delta_1 \|_2$$

$$< 2\varepsilon 。$$

他方 ψ_n は S の元だから、$| \psi_n(e) - |\xi_n(1)|^2 \tau(e) | \geq 1 - 2\varepsilon$

となり、$\varepsilon < \frac{1}{4}$ なることに矛盾する。従って $\{|\xi_m(1)|\}_m$ は

1に収束しないから $\{\xi_m\}_m$ の適当な部分列 $\{\xi_k\}_k$ で

(※) の条件を充すものがとれる。故に、G は、inner

amenable である。

<u>Reduced group C^*-algebra</u>

定理3で群(G)の amenability と $B(l^2(G))$ 上の state との関係を

示したが、G が Icc group でなくても、定理3は成立する。

又 state はもっと強い次の定理のような性質をもつものに，よって与えられる。次の定理8は，discrete でない locally compact group に対しても真である。

<u>定理8</u>　discrete countably infinite group G が amenable である為の必要十分条件は，$B(l^2(G))$ 上の state φ で $\varphi(\lambda_g)=1$ $(g\in G)$ を充すものが存在することである。

<u>証明</u>　G が amenable とすると［12：定理 2.4.3］と，G が可算であることより $l^1(G)$ の中の sequence $(\eta_n)_n$ で $\|\eta_n\|_1=1$，$\eta_n(g)\geq 0$ $(g\in G)$ かつ $\|\lambda_g\eta_n-\eta_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(g\in G)$ を充すものが存在する。各 n に対して，$\xi_n(g)=\left(\eta_n(g)\right)^{1/2}$ とおくと，$\|\xi_n\|_2=1$ かつ $\|\lambda_g\xi_n-\xi_n\|_2 \leqq (\|\lambda_g\eta_n-\eta_n\|_1)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(g\in G)$ を充す。φ を ξ_n に対応する vector state の集合の $B(l^2(G))$ 上での w^* cluster point とすると，φ は state で $\varphi(\lambda_g)=1$ $(g\in G)$ を充す。

逆に，$B(l^2(G))$ 上の state φ が $\varphi(\lambda_g)=1$ $(g\in G)$ を充すとすると，Schwartz の不等式より $\varphi(\lambda_g x\lambda_g^*)=\varphi(x)$ $(x\in B(l^2(G))$, $g\in G)$ を充す。故に定理3におけると同様な証明により，G は amenable である。//

<u>系9</u>　群 G が amenable であれば $C_r^*(G)$ は character を持つ，従って $C_r^*(G)$ は simple でない。

amenable group に対するこの結果は，since amenable でない群の代表例 F_2 に対する $C_r^*(F_2)$ は simple で唯一の

tracial state を持つ）という Powers [16] の結果と対照的である。そこで G の inner amenability と $C_r^*(G)$ のこれらの性質との間に何らかの関連があるかという事が考えられるが次に示す例によって，これらは互いに独立な性質である事が判る。

例1　G を F_2 の weak direct product $\prod_1^\infty G_n$ （$G_n = F_2$）とすると，G は inner amenable ICC group で，$C_r^*(G)$ は，唯一つの tracial state をもつ simple な C^*-algebra である[3]。

例2　α を F_2 の Π の outer automorphism group への表現で，α_g ($g \neq 1$) が non trivial な固定点をもたないとする。積を $(g, f)(h, l) = (gh, \alpha_h^{-1}(f)l)$ ($g, h \in F_2$, $f, l \in \Pi$) で定義された F_2 と Π の semi direct product を G とする。すると G は inner amenable でない ICC group で，$C_r^*(G)$ は，2つ以上の tracial state をもつ simple でない C^*-algebra である[3]。

文　献

[1] C. Akemann, The dual space of an operator algebra, Trans. A.M.S., 126(1967), 286−302.

[2] H. Choda, A comment on the Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 50(1974), 619−622.

[3] H. Choda & M. Choda, Fullness, simplicity and inner amenability, preprint.

[4] M. Choda, Automorphisms of finite factors on free groups, Math. Japonica, 22(1977), 219-226.

[5] ————, Some relations of II_1-factors on free groups, Math. Japonica, 22(1977), 383-394.

[6] ————, The crossed product of a full II_1-factor by a group of outer automorphisms, Math. Japonica, 23(1978), 385-391.

[7] ————, The factors of inner amenable groups, to appear in Math. Japonica.

[8] A. Connes, Almost periodic states and factors of type III_1, Journal of Funct. Anal., 16(1974), 415-445.

[9] ————, Classification of injective factors, Ann. Math., 104(1976), 73-115.

[10] J, Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. Math. France 81(1953), 9-39.

[10'] ————, Quelque propriétés de suites centrales dans les facteurs de type II, Invention Math., 7(1969), 215-225.

[11] E. G. Effros, property Γ and inner amenability, Proc. A. M. S., 47(1975), 483-486.

[12] F. P. Greenleaf, Invariant means on topological group,

Van Nostrand Math. Studies, NO. 16, (1969).

[13] D. McDuff, On residual sequences in a II_1-factor, J. London Math. Soc. 3(1971), 271–280.

[14] Y. Misonou, On divisors of factors, Tôhoku Math. J. 8(1956), 63–69.

[15] M. Nakamura & Z. Takeda, On certain examples of the crossed product of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1958), 495–499.

[16] R. T. Powers, Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators, Duke Math. J., 42(1975), 151–156.

[17] J. Philips, Automorphisms of full II_1-factors, with applications to factors of type III, Duke M. J. 43(1976), 375–385.

[18] S. Sakai, Asymptotically abelian II_1-factors, Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ., 4(1968), 299–307.

[19] ———, On automorphism groups of II_1-factors, Tôhoku Math. J., 26(1974), 423–430.

[20] I. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math. 57(1953), 401–457.

[21] M. Takesaki, On the singularity of a positive linear functional on operator algebras, Proc. Japan Acad.,

35 (1959), 365–366.

[22] J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture notes of the Math. Inst. of Univ. of Copenhagen, 1970.