数理解析研究所講究録
第373巻 1979年 1-27

超関数への数値的接近

日大 理工　　竹澤 照

序．1920年後半にDiracは連続固有値の直交規格化の関係を離散固有値のそれと全く同様に形式的に扱うために，無限大の量を表わす$\delta(x)$を導入し，

$$\delta(x)=0\ (x\neq 0),\quad \delta(0)=+\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

と定義した。しかしこのような性質をもつ通常の関数は存在しない。にもかゝわらず彼は名著「量子力学[1]」の中で数学的には正しいとはいえない演算で，物理的には正しい種々の結果を与へている。Dirac自身，$\delta(x)$は象徴的な意味のものであって，通常の関数のようにおのおののxの値に対して関数の値が定まるものではなく，積分 $\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$ に意味を持たせ，通常の関数と区別し improper function と呼んでいる。この奇形な関数がDiracのdelta関数と呼ばれ導入された最初の超関数である。以来，数学的正当性を与へる幾多の研究が多くの数学者によってなされ，超関数の理

論が飛躍的に進歩し，1950年にSchwartzのdistribution[2)]で一応の集大成をみた。[注)] しかし関数空間，位相等の定義や記号の使用が，数学者以外には難解で近き難いものであった。 1955年にMikusinski[3)]の考へを受けついでTemple[4)]が超関数，generalized functionを関数列によって定義するという古典解析学で使われる概念だけを用いて平易な形に表現しなおした。 更にLighthill[5)]やGel'Fand[6)]によって簡単化され，一層近き易いものとなった。 更に一歩進め，筆者は宇野・洪[7)]の考へを受けつぎ，現実の問題の中での超関数を扱い，それらへの数値的接近を試みたものである。 即ち超関数は象徴的なものであっておのおのの点での関数の値が定まるものではないとすることに逆らい，超関数といえども関数値が定まり，グラフも描けることを主張する。 本論文では第一種フレドホルム型積分方程式の解に現われる超関数及熱伝導方程式の初期値問題の逆問題として，初期値に現われる超関数を扱う。 特に衝撃・パルス・一点集中応力トルクなどとしていたるところに登場するデルタ関数及その導超関数について例示し，その直観を与へ，より一層超関数を身近なものとする。

注) その後の発展に佐藤のhyper functionやultra-hyperfunctionがある。

§1　Templeは超関数を「基本列$\{f_\nu(x)\}$は一つの超関数$f(x)$を定める」と定義している。

基本列とは　$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x)F(x)\,dx$

が存在するような関数列$\{f_\nu(x)\}$のことである。　但し$f_0(x)$も$f(x)$もいたるところ微分可能であり且すべてのNに対して関数自身とそのすべての導関数が$|x|\to\infty$で$O(|x|^{-N})$とする（このような性質をもつ関数を良い関数又は急減少関数と呼ぶ）。　又関数列$\{\frac{d}{dx}f_\nu(x)\}$が超関数$f(x)$の導超関数を与へるものであるとしている。　この操作を繰り返すことによって$f(x)$のm階導超関数$f^{(m)}(x)$を定める基本列を作ることが出来る。　良く知られているように

関数列　$\{\sqrt{\nu/\pi}\,e^{-\nu x^2}\}$,

$\{\nu/\pi(1+\nu^2)\}$

$\{\sin\nu x/\pi x\}$

は$\delta(x)$に収束する基本列である。　以下に$\{\frac{d^m}{dx^m}f_\nu(x)\}$を列挙し、それらを図示する。

関数列　$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}$に対して：

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi}\,xe^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}'' = -2\nu\sqrt{\nu/\pi}(1-2\nu x^2)e^{-\nu x^2}$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}''' = \sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}(12\nu^2x-8\nu^3x^3)$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}^{(IV)} = \sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}(12\nu^2-48\nu^3x^2+16\nu^4x^4)$$

$$\{\sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}\}^{(V)} = \sqrt{\nu/\pi}e^{-\nu x^2}(-120\nu^3 x+160\nu^4 x^3-32\nu^5 x^5)$$

fig 1の上がこれらを図示したものである。 ($\nu=5, 15, 45$)

関数列$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}$ 但し$\varepsilon=1/\nu$ に対して

$$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}' = -2\varepsilon x/\pi(x^2+\varepsilon^3)^2$$

$$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}'' = -2\varepsilon(-3x^2+\varepsilon^2)/\pi(x^2+\varepsilon^2)^3$$

$$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}''' = -24\varepsilon x(x^2-\varepsilon^2)/\pi(x^2+\varepsilon^2)^4$$

$$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}^{(IV)} = -24\varepsilon x(x^2-\varepsilon^2)/\pi(x^2+\varepsilon^2)^4$$

$$\{\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)\}^{(V)} = -240\varepsilon(3x^5-10\varepsilon^2 x^3+3\varepsilon^4 x)/\pi(x^2+\varepsilon^2)^6$$

fig 1. の中段がこれらを図示したものである。

($\nu=5, 10, 15$)

関数列$\{\sin\nu x/\pi x\}$に対して

$$\{\sin\nu x/\pi x\}' = (\nu x\cos\nu x-\sin\nu x)/\pi x^2$$

$$\{\sin\nu x/\pi x\}'' = \{-2\nu x\cos\nu x+(2-\nu^2x^2)\sin\nu x\}/\pi x^3$$

$$\{\sin\nu x/\pi x\}''' = \{\nu x(6-\nu^2x^2)\cos\nu x-3(2-\nu^2x^2)\sin\nu x\}/\pi x^4$$

$$\{\sin\nu x/\pi x\}^{(IV)} = \{(-24\nu x+4\nu^3x^3)\cos\nu x+(24-12\nu^2x^2+\nu^4x^4)\sin\nu x\}/\pi x^5$$

$$\{\sin\nu x/\pi x\}^{(V)} = \{(120\nu x-20\nu^3x^3+\nu^5x^5)\cos\nu x$$
$$+(-120+60\nu^2x^2-5\nu^4x^4)\sin\nu x\}/\pi x^6$$

fig 1. の下段がこれらを図示したものである。 ($\nu=7$)

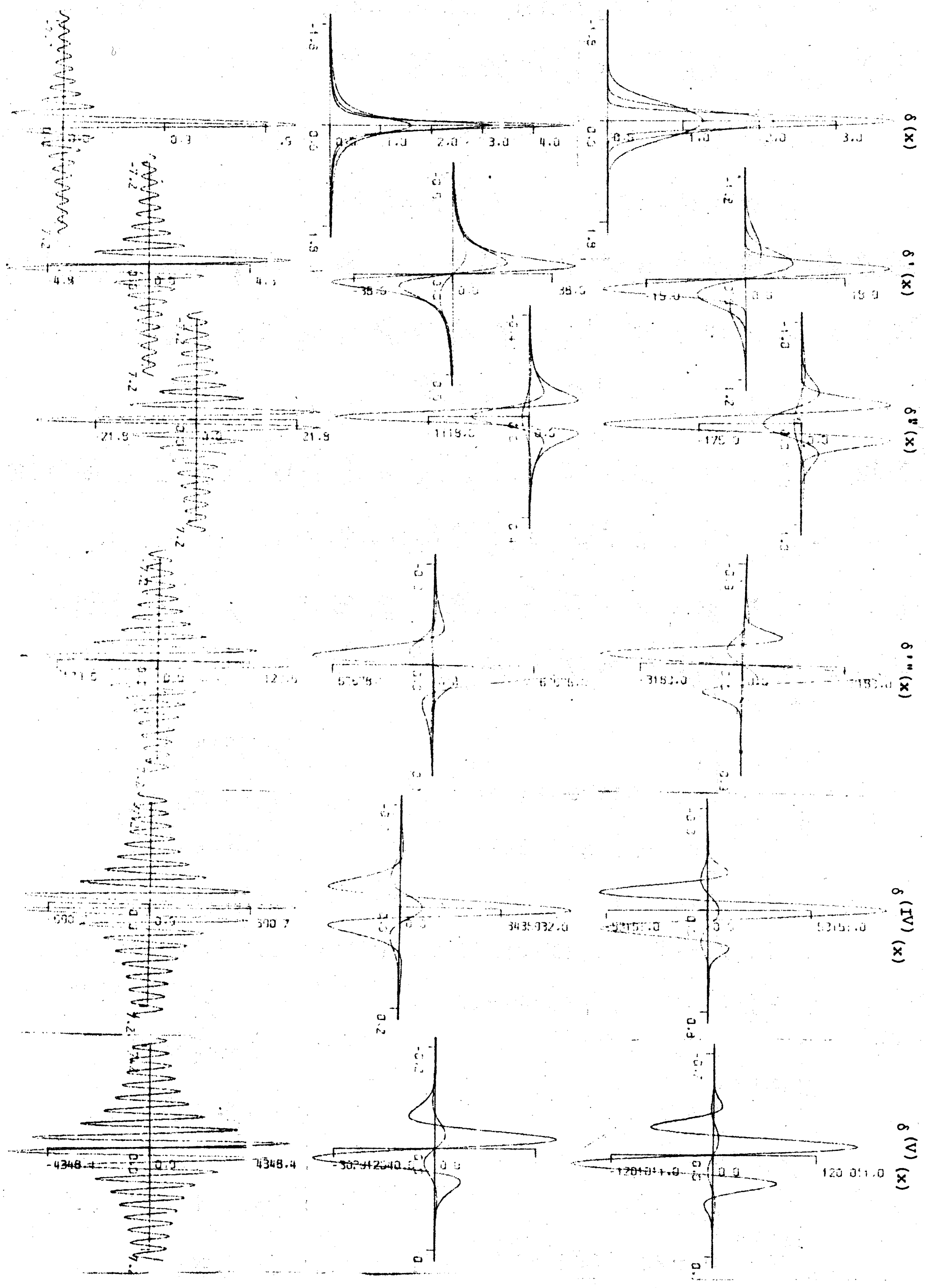


Fig. 1

2.2 区間[0,1]内に有限個の点 $a_1, a_2, \cdots a_L$ で $g(x)$ 又は $g^{(m)}(x)$ に $\sigma_m(a_l)$ だけの跳び即ち

$$\sigma_m(a_l) = g^{(m)}(a_l+) - g^{(m)}(a_l-)$$

$$m=0,1,2\cdots \quad , \quad l=1,2,\cdots,L$$

の有る関数を積分方程式の右辺に与へる。すると前述の積分方程式の解の中の $g^{(m)}(x)$ を超関数の意味での微分

$$g_1^{(m)}(x) = g^{(m)}(x) + \sum_{l=1}^{L}\sum_{p=0}^{m-1} \sigma_p(a_l)\,\delta^{(m-1-p)}(x-a_l)$$

で置き換へることによって，δ 及その導超関数 $\delta^{(m)}$ を含む解が得られる。但し上式での $g^{(m)}(x)$ は点 a_l, $l=1,2,\cdots L$ を除いたところでの通常の m 階導関数である。以下に区間[0,1]内に跳びのある関数を列挙する。

g-1

$$g(x)=\begin{cases} 48x^2 & ,1/4\geq x\geq 0 \\ -8(x+1)(x-11/20) & ,1/2>x\geq 1/4 \\ 8(x-2)(x-9/20) & ,3/4\geq x>1/2 \\ 16(-1) & ,1\geq x\geq 3/4 \end{cases}$$

$\sigma_0(1/2)=-1.2, \sigma_2(1/2)=32, \sigma_1(1/4)=-31.6, \sigma_2(1/4)=-112$

$\sigma_1(3/4)=15.6, \sigma_2(3/4)=16$

g-2

$$g(x)=\begin{cases} -x & ,0\leq x<1/4 \\ 1-x & ,1/4<x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_0(1/4)=1$

g-3

$$g(x)=\begin{cases} x/2 & ,0\leq x\leq 1/4 \\ -x/2+1/4 & ,1/4\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_1(1/4)=1, g(1)=-1/4$

§2. 第一種フレドホルム型積分方程式

2.1 $K(x,y)$が対称核のときの第一種フレドホルム型積分方程式

$$\int_0^1 K(x,y)h(y)\,dy = g(x) \qquad (1)$$

の解 $h(x)$ に含まれる超関数を扱うことにする。　ここで扱う核(対称核なる故 $x \geq y$ のみ記す)及それに対する解を列挙する。

K-1 $L[u]=2u''-2u$ のGreen 関数

$K(x,y)=e^{-|x-y|}$

$h(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}[g(0)-g'(0)]\delta(x)+\frac{1}{2}[g(1)+g(1)]\delta(x-1)$

K-2 $u(0)=u(1)=0$ ときの $L[u]=u''$ のGreen 関数

$k(x,y)=y(1-x),\ x \geq y$

$h(x)=-g''(x)-g(0)\delta'(x)-g(1)\delta'(x-1)$

K-3 $u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)$ ときの $L[u]=u^{(IV)}$ の Green 関数

$K(x,y)=\frac{1}{6}y(x-1)(x^2+y^2-2x),\ x \geq y$

$h(x)=g^{(IV)}(x)+g(0)\delta'''(x)+g''(0)\delta'(x)-g(1)\delta'''(x-1)-g''(1)\delta'(x-1)$

K-4 $u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=u^{(IV)}(0)=u^{(IV)}(1)=0$ ときの Green 関数

$L[u]=u^{(IV)}$

$K(x,y)=\frac{1}{360}y(x-1)\{-3x^4+12x^3-(10y^2+8)x+(20y^2-8)x-3y^4\},\ x \geq y$

$h(x)=-g^{(VI)}(x)-g(0)\delta^{(V)}(x)-g''(1)\delta'''(x-1)+g^{(IV)}(1)\delta'(x-1)$

K-5 Poisson 核

$K(x,y)=\dfrac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(x-y)+\gamma^2}$;$0<\gamma<1$　($\gamma=0.75$ とした)

$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k a_k\cos 2k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k b_k\sin 2k\pi x$　のとき

$h(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos 2k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin 2k\pi x$

g-4 $$g(x)=\begin{cases} x^2 & ,0\leq x\leq 1/4 \\ x^2/2+x/4-1/32 & ,1/4\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_2(1/4)=1, g''(0)=2, g(1)=5/4, g''(1)=1$

g-5 $$g(x)=\begin{cases} 27x^3 & ,0\leq x\leq 1/4 \\ (x-1)(-37x^2+11x-1) & ,1/4\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_3(1/4)=-384, g''(1)=-126$

g-6 $$g(x)=\begin{cases} 81x^4 & ,0\leq x\leq 1/4 \\ -175x^4+256x^3-96x^2+16x-1 & ,1/4\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_4(1/4)=-6144, g^{(IV)}(0)=1944, g^{(IV)}(1)=-4200$

g-7 $$g(x)=\begin{cases} 243x^5 & ,0\leq x\leq 1/4 \\ (x-1)(-781x^4+499x^3-141x^2+19x-1) & ,1/4\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$\sigma_5(1/4)=-122880, g''(1)=-3780, g^{(IV)}(1)=-63000$

g-8 Weierstrassの関数

$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k\cos(a^k x\pi)$, ($a=13, b=0.5$, kは50までとした)

2.3 三角級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi x/l} \qquad (2)$$

は次のとき、一つの超関数 $f(x)$ を定める。

i) $|k|\to\infty$ のとき、ある N を選んで $c_k=O(|k|^N)$ と書けるとき、(2) は一つの Schwartz distribution $f(x)$ に収束する

ii) $|k|\to\infty$ のとき、任意の $c>1$ に対して $c_k=O(c^{|k|})$ と書けるとき、(2) は一つの hyperfunction $f(x)$ に収束する。

例へば

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)2\pi x+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\delta(2\pi x-\pi/2+k\pi)$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)2\pi x=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\delta'(2\pi x-\pi/2+k\pi)$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)2\pi x=-\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\delta''(2\pi x-\pi/2+k\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2\pi kx=1/2\cot\pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\cos 2\pi kx=1/4\cos^2\pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}k^3\cos 2\pi kx=(\cos^2\pi x+3\sin^2\pi x)/8\cos^4\pi x$$

これらに関する $g(x)$を列挙する

g-9 $$g(x)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin k\pi x$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\left\{-\pi x+\pi x\log\pi x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pi x)^{2k+1}}{k(2k+1)\cdot 2\cdot(2k)!}|B_{2k}|\right.$$

但し B_{2k} はベルヌーイ数, kは20までとった。

g-10 $$g(x)=2\sum_{1}^{\infty}r^{2k-1}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)2\pi x$$

g-11 $$g(x)=2\sum_{1}^{\infty}r^{2k-1}(-1)^{n-1}k\cos(2k-1)2\pi x$$

g-12 $$g(x)=2\sum_{1}^{\infty}r^{2k-1}(-1)^{n}k^2\sin(2k-1)2\pi x$$

g-13 $$g(x)=\sum_{1}^{\infty}r^{k}\sin k2\pi x$$

g-14 $$g(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}rk\cos k2\pi x$$

g-15 $$g(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k}r^{k}k^3\cos k2\pi x$$

2.4 数値解法

積分方程式の左辺を数値積分公式で離散化し, それと同数の点 x_iを与へ. 連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^{n}W_jK(x_i,y_j)h(y_j)=g(xi),\ i=1,2,\cdots,n$$

をLU分解法（Doolittle 法）で解くことにする。

台形則： $W_0=W_n=1/2,\ W_j=1,\ j+1,\cdots .n-1$

$$x_i=i/n,\ i=0,1,\cdots,n$$

$$y_i=j/n,\ j=0,1,\cdots,n$$

中点則： $W_j=1,\ j=1,2,\cdots,n$

$$x_i=i/n-1/2n,\ i=1,2,\cdots,n$$

数値計算は全て16進8桁（10進で約17.1桁）の浮動小数点演算で行う。

2.5 計算例

核	g(x)	h(x)	数値解（数値積分公式）
K-1	g-1	$1/2g(x)-1/2g''(x)$	table 1-1（台形則）
		$+15.8\delta(x-1/4)+0.6\delta'(x-1/2)$	
		$+7.8\delta(x-3/4)+8\delta(x-1)$	
K-1	g-1	$+7.8\delta(x-3/4)+8\delta(x-1)$	table 1-2（中点則）
K-2	g-1	$-g''(x)+31.6\delta(x-1/4)$	table 2 （ 〃 ）
		$+1.2\delta'(x-1/2)-15.6\delta(x-3/4)$	
K-3	g-2	$\delta'''(x-1/4)$	table 3 （ 〃 ）
k-3	g-3	$\delta''(x-1/4)+1/4\delta'(x-1)$	table 4 （ 〃 ）
K-3	g-4	$\delta'(x-1/4)+2\delta'(x)$	table 5 （ 〃 ）
		$-5/4\delta'''(x-1)-\delta'(x-1)$	
K-3	g-5	$-384\delta(x-1/4)+126\delta'(x-1)$	table 6 （ 〃 ）
K-4	g-2	$\delta^{(V)}(x-1/4)$	table 7 （ 〃 ）
K-4	g-3	$-\delta^{(IV)}(x-1/4)-1/4\delta^{(V)}(x-1)$	table 8 （ 〃 ）

K-4	g-4	$-\delta'''(x-1/4)-2\delta'''(x)+\delta'''(x-1)$	table 9 (中点則)
K-4	g-5	$384\delta''(x-1/4)-126\delta'''(x-1)$	table 10 (〃)
K-4	g-6	$6144\delta'(x-1/4)-1944\delta'(x)-4200\delta'(x-1)$	table 11 (〃)
K-4	g-7	$122880\delta(x-1/4)3780\delta'''(x-1)-63000\delta'(x-1)$	table 12 (〃)
K-2	g-4	$-2H(-x+1/4)-H(x-1/4)+5/4\delta(x-1)$	table 13 (〃)
K-2	g-5	$-162xH(-x+1/4)+(222x-96)H(x-1/4)-126\delta(x-1)$	table 14 (〃)
K-2	g-8		table 15 (〃)
K-5	g-9	$\delta(x-1/4)-\delta(x-3/4)$	table 16 (〃)
K-5	g-11	$\delta'(x-1/4)-\delta'(x-3/4)$	table 17 (〃)
K-5	g-12	$-\delta''(x-1/4)+\delta''(x-3/4)$	table 18 (〃)
K-2	g-9	$1/2\ \cot\pi x$	table 19 (〃)
K-5	g-13	$1/2\ \cot\pi x$	table 20 (〃)
K-5	g-14	$1/4\ \cos^2\pi x$	table 21 (〃)
K-5	g-15	$(\cos^2\pi x+3\sin^2\pi x)/8\cos^4\pi x$	table 22 (〃)

2.6 $\delta^{(m)}(x-a)$ の現われるところでは他の点での値に比べ大きな数値が得られている。しかもこの点附近の数値は分割数nに大きく依存することが観測される。それらを解析

してみよう．

結果Ⅰ．分割数nを倍に増したときの$\delta^{(m)}$の存在する点での計算値の変化の倍率をおのおのの核に対して下表に示す。（nは8から256まで行った）。

δ \ K	K-1	K-2	K-3	K-4	K-5
δ	2.002	2.0000000000000	1.999999999	2.000	2.00000000000000
δ'	4.002	4.0000000000000	3.9999998	3.9993	4.1
δ"			7.99999998	8.0000	7.8
δ"'			16.00000000	16.01	
$\delta^{(IV)}$				32.000	
$\delta^{(V)}$				64.0000	

このことからδ及$\delta^{(m)}$の大きさはnの$(m+1)$乗に比例することがわかる。又表中の数値は2倍，4倍，…からはずれる桁数で打切ってある。実はこの桁数が$\delta^{(m)}$の存在しない他の分点での通常の解のところでの精度とほゞ一致している。

結果Ⅱ　積分の分点x_iと$g(x)$の跳びの点a_ℓとが丁度一致するとき，$g(x_i)$に適当な値Cを与へ計算を実行する。その結果

核Ⅰ及Ⅱでの$\sigma_0(a_\ell)\delta'(x-a_\ell)$が $(C-f(a_\ell-))\delta'(x-a_\ell+\frac{1}{2n})$

と　$(f(a_\ell+)-C)\delta'(x-a_\ell-\frac{1}{2n})$

とに分かれる。K-3のδ'''，K-4での$\delta^{(V)}$も同様な現象が見られる。

結果Ⅲ　区間の端での$\delta \sim \delta^{(\mathrm{V})}$は内部でのものの2倍の高さをもつ。

結果Ⅳ　K-1又は2で$\sigma_2(a_e)$や$\sigma_3(a_e)$を持つ$g(x)$を与へると，$\sigma_2(a_e)$では分割数nには依存せず，一定値$\sigma_3(a_e)$ではれに逆比例するものが現れ，その形状はFig. 5である。これらは積分を離散化したために現れたものであろう。K-3ではσ_4, σ_5，K-4ではσ_6, σ_7で同様の現象がみられる。以上より，第一種フレドホルム型積分方程式に現われるδ関数及その導超関数は，前述のような数値解法を採用したとき

$$\delta^{(m)}(x-a) = C_m n^{m+1} \varphi_m(x)$$

と表わされる。ここにC_m及$\varphi_m(x)$は核により定まるものである。例へばFig. 2に示すように核K-1とK-2に対しては，$C_0 = C_1 = 1$,

$$\varphi_0(x) = \frac{h \quad x-a}{h} \sqcap(x)$$

$$\varphi_1(x) \begin{cases} -\mathrm{sgn}\,(x-a) \sqcap(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

となる。但し$h = 1/n$, $x = a + qh$, $q = [-1, 1]$ 及$\sqcap(x)$はqでの区間$[-1, 1]$内でのみ1で他では0となる単位関数である。他の核に対しては$\varphi_m(x)$の具体形を示すことは困難であるがFig 3がK-3, Fig 4がK-4に対する形状である。なおこれらの図は次のように描いたものである。

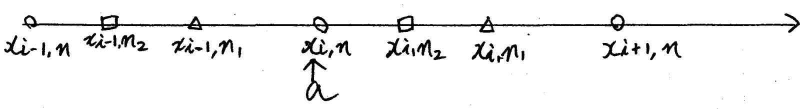
分割数nのときの分点の座標を $x_{i,n}$, $i=1\cdots,n$

〃 n_1 〃 x_{i,n_1} 〃

〃 n_2 〃 x_{i,n_2} 〃

⋮

としたときの，点 $x_{i,n_1}, x_{i,n_2}, \cdots$ での計算値 $h(x_{i,n_1}), h(x_{i,n_2})$ $\cdots$ を $\delta^{(m)}$ のところでは $h(x_{i,n_1})\times(n/n_1)^{m+1}$, $h(x_{i,n_2})\times(n/n_2)^{m+1}$, $\cdots$ と分割数nのときの値に換算した値を $\delta^{(m)}(x-a)$ のある点aを中心に分割数nでの二区間内にプロットしたものである。



図からみらるるように Temple のそれと極めて一致した形状を示している。又 Dirac は $\delta(0)=+\infty$ の ∞ はむやみに大きなものではなく，原点を中心に幅εをもたせたときε^{-1}の程度の無限大であるといっている。筆者の得た数値解はこれらのことを極めて合理的に物語っている。この手法により未知の積分方程式の解に含まれるδ及その導関数を検出することが可能となる。即ち数値解が分割数nの$m+1$乗に比例して得られる部分には，$\delta^{(m)}(x-a)$ が在る。但し Weierstraß の関数のような関数を右辺にもつ積分方程式，即ち解にいたるところ$\delta^{(m)}$を含む場合は除外する。

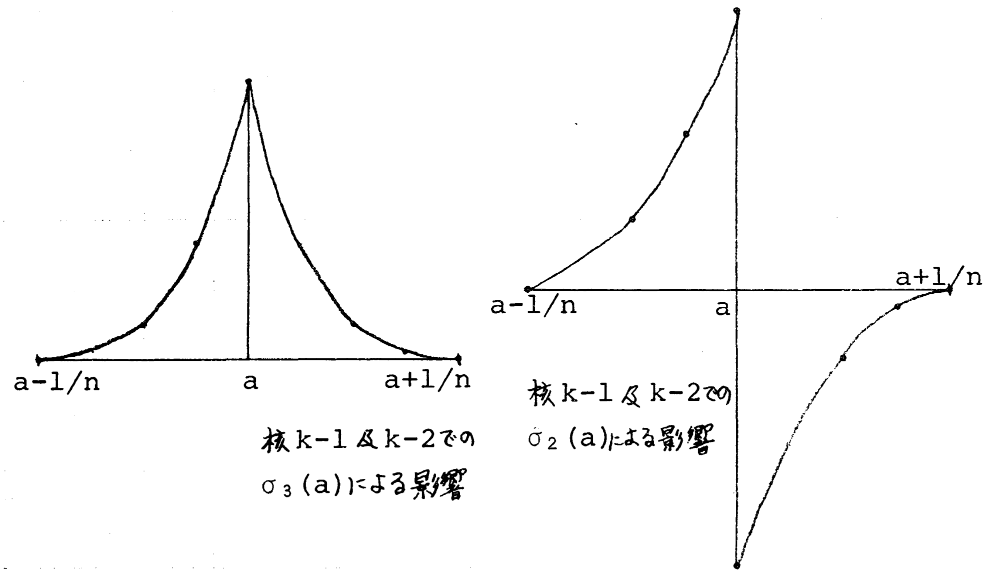


Fig.5

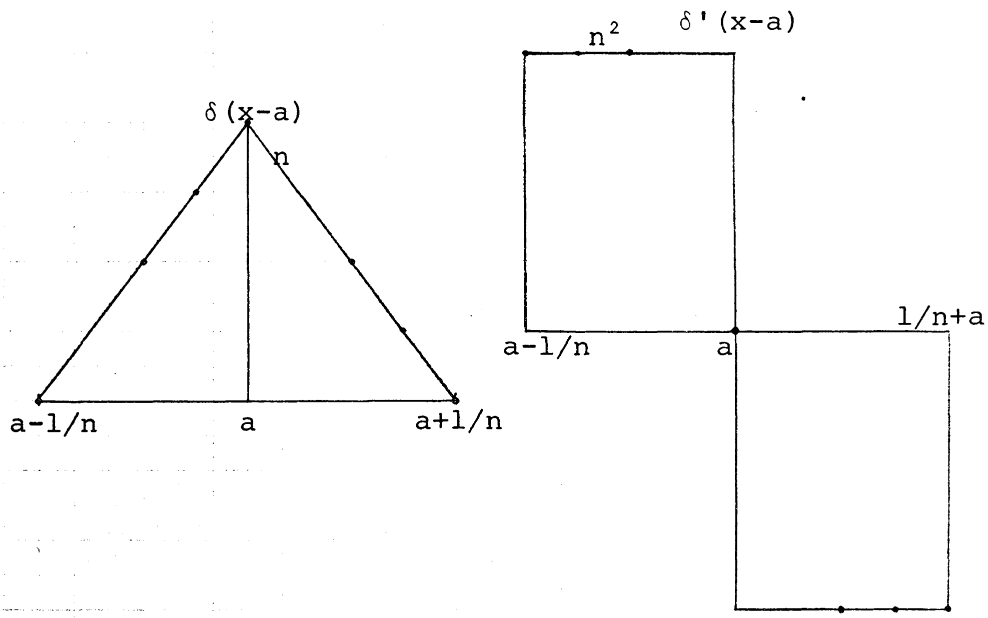


Fig. 2

核 k-1及k-2 での$\delta^{(m)}(x-a)$

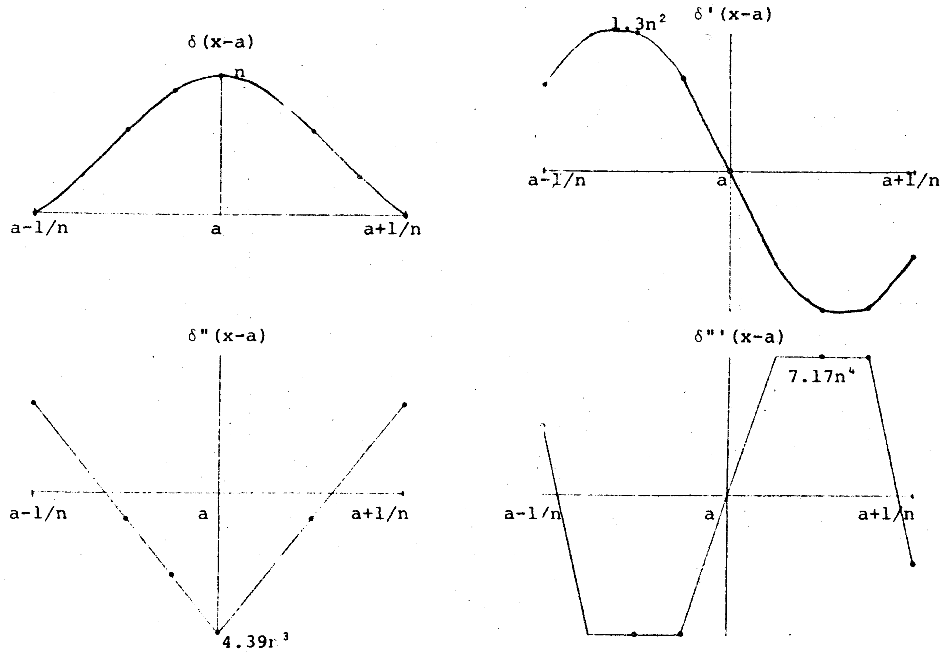


Fig. 3
核 k-3 での $\delta^{(m)}(x-a)$

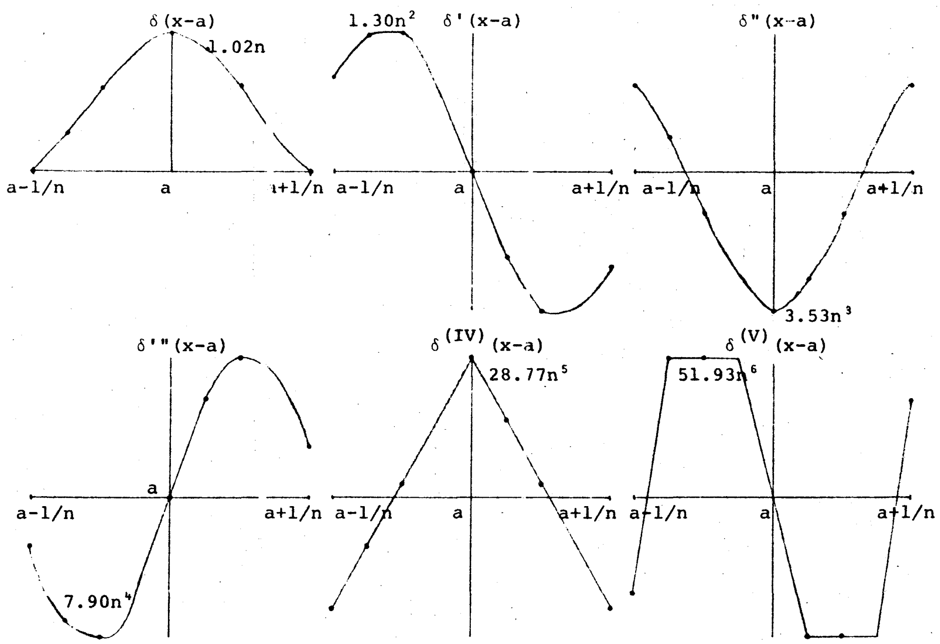


Fig. 4
核 k-4 での $\delta^{(m)}(x-a)$

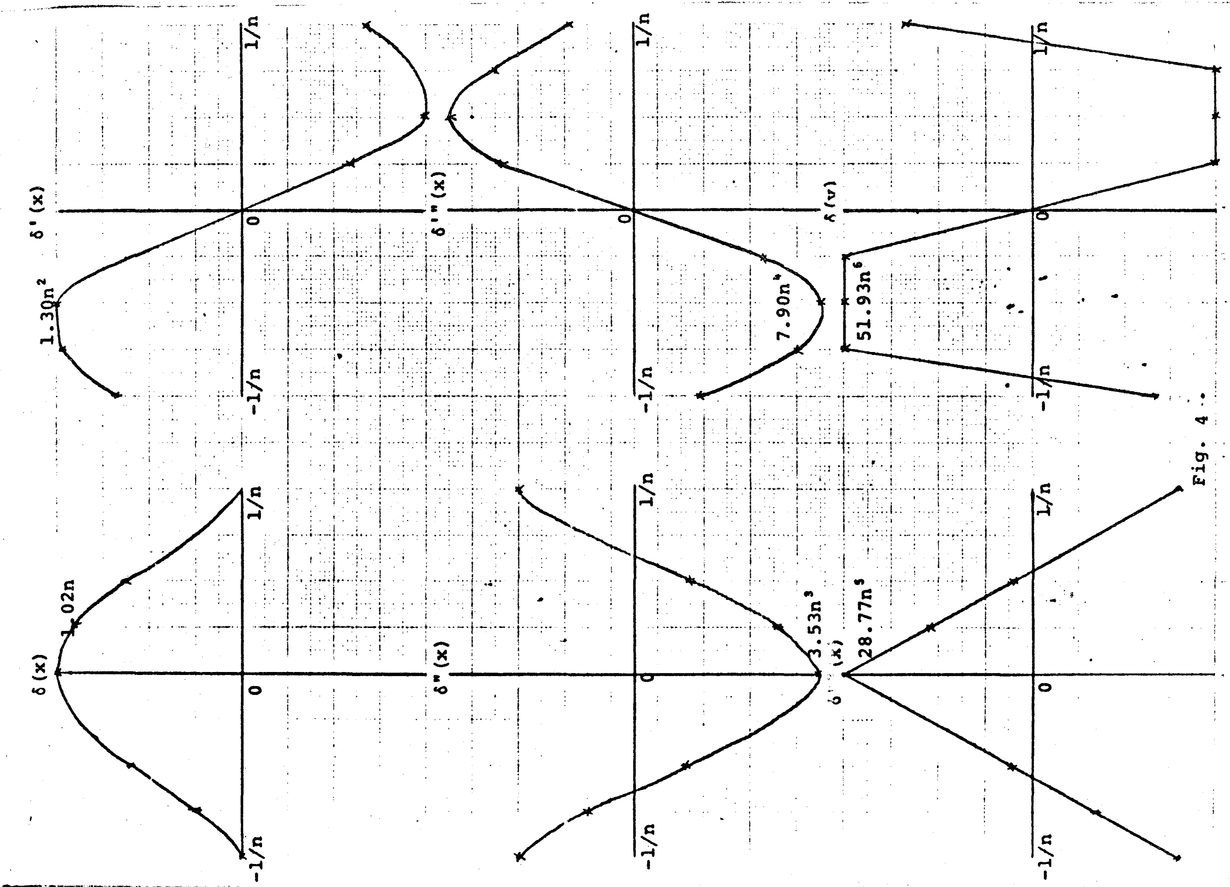

δ(x)
1.02n
δ'(x)
1.30n²
δ''(x)
3.53n³
δ'''(x)
7.90n⁴
28.77n⁵
δ(v)
51.93n⁶
1/n
0
-1/n

Fig. 4

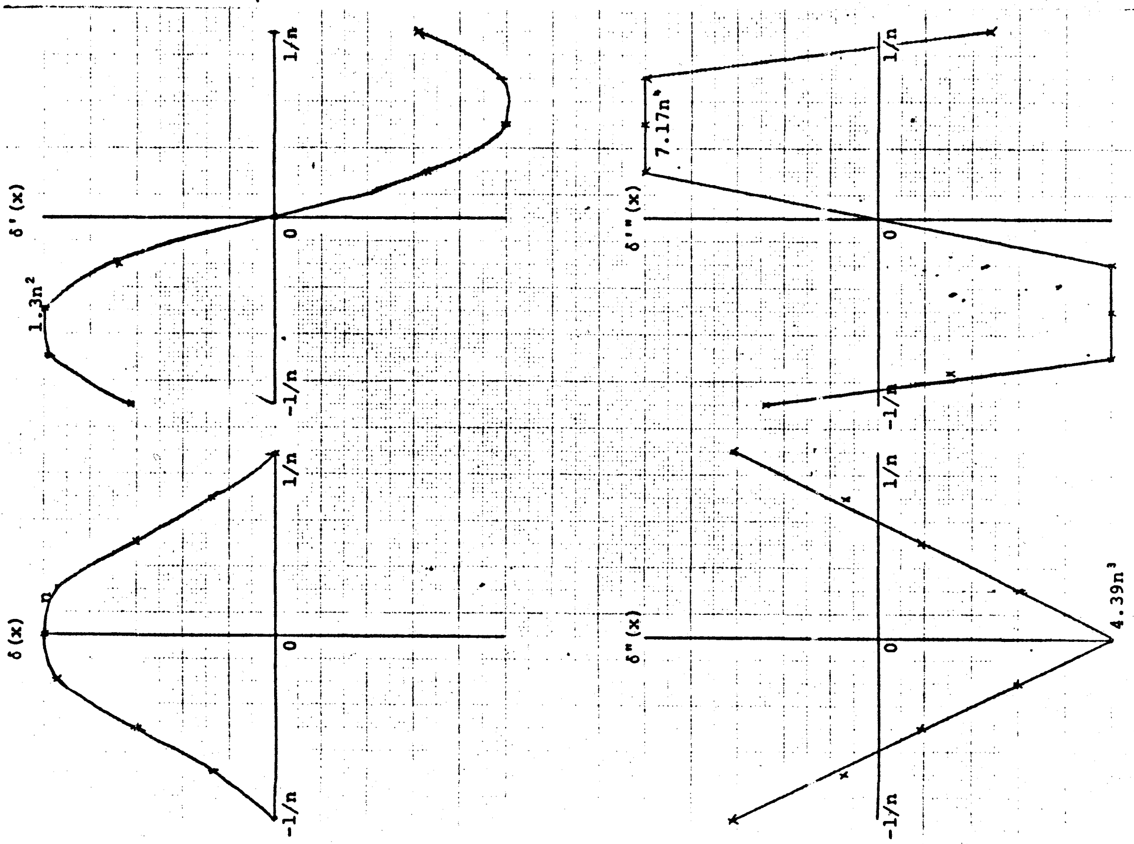

δ(x)
δ'(x)
1.3n²
δ''(x)
4.39n³
δ'''(x)
7.17n⁴
1/n
0
-1/n

Fig. 3

2.7 積分方程式(1)が解を持つための必要十分条件としてのPicardの定理がある。即ち

$$K'(x,y)=\int K(x,s)K(y,s)ds$$

を考え、この核の固有値を$\{\lambda_k^2\}$、それに応ずる固有関数を$\{\mu_k(x)\}$とする。(1)の右辺を$\mu_k(x)$によってFourier展開し、

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\mu_k(x)$$

としたとき、解$h(x)$が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 C_k^2 \qquad (2)$$

が収束することである。この定理を満さない場合の一例が$g(x)$に $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{\pi^2 n^2}$ を与へ、K-2の場合である。すると$K'(x,y)$の固有値は$n^4\pi^4$、C_nは$\frac{1}{n^2\pi^2}$であるので(2)式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^4\frac{1}{n^4\pi^4}=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

となり発散する。しかし形式解は$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x$である。これは発散級数であるが、超関数の意味で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2}x$$

となるものである。Poisson核で解いても同様の結果が得られる。

2.8 初期値ないし境界値問題の逆問題

領域の内部で所定の偏微分方程式の解となっている関数が領域の境界に接近するときの振舞を知りべようとするもので

ある。このことを数値的に調べ超関数をみようとするものである。

熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (3)

の両端断熱 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ (4)

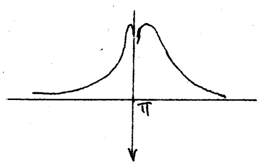
の場合を取り扱う。$t>0$ での(3)の解が $t=0$ でどうなるかを調べる。ここで得た数値的様相が断熱条件の熱伝導の物理的意味と合致している。

i) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n^2 t} \cos nx$

$t=0$ とすると

$$u(x,0) = \cos x - 2\cos 2x + 3\cos 3x - \cdots$$

でこれは超関数の意味で $1/4\cos^2\frac{x}{2}$ に等しい。即ち初期値が $1/4\cos^2\frac{x}{2}$ である。数値実験の結果 $x=\pi$ で丁度 $1/4\cos^2\frac{\pi}{2}$ と反対の符号となりこのような特異点での様子をグラフに描くとすれば右図のようなものである。



ii) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 e^{-n^2 t} \cos nx$

$t=0$ とすると

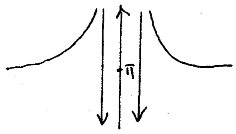
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 \cos nx$$

となり，これは超関数のFourier展開の意味で

$$\left\{\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}\right\} / 8\cos^4\frac{x}{2}$$

に等しい。ところが数値解は $x=\pi$ 附近でこの式とはなれだし $\pm\infty$ と振動してくる。これをグラフに描くとすれば

下図のようになりquintett的様相を持ったものである。



終わりに

数値計算は日本大学理工学部のHITAC 8700, OKITAC 4300C及 東京大学大型計算機センターのHITAC8700/8800で行なわれた。なお、本研究に際し終始御指導下さいました日本大学、宇野利雄博士並びに有益な御助言を頂いた京都大学、一松信教授に、心からの謝意を表す。

References

1) P.A.M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford UP, 1930

2) L. Schwartz: Theorie des Distri bution, tomes I etII, Hermem et Cie, 1950-1

3) 佐藤幹夫: 超関数の理論, 数学, 10巻, 1号,

4) J.G. Mikusinski: Fundam. Math, 35,235,1948

5) G. Temple: Theory of Generaliged Functions, Proc. Roy. Soc. A 228,1955

6) M.J.Lighthill: An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge UP,1958

7) I.M.Gel' Fand and G.E.Shilov: Obobshchennye Funktsii, Vypusk I, Moscow, 1958

8) T. UNO and I. Hong: A Relation between Some Fredholm Type Linear Integral Equations of First Kind and Linear Algebraic Simultaneous Equations, Mathematica Japonicae, 20, 1975

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-71.99999999959995	-96.00000000000000
2	0.0937500000000000	-96.00000000000010	-96.00000000000000
3	0.1562500000000000	-95.99999999999984	-96.00000000000000
4	0.2187500000000000	170.8000000000000	-96.00000000000000
5	0.2812500000000000	254.8000000000000	16.00000000000000
6	0.3437500000000000	15.99999999999983	16.00000000000000
7	0.4062500000000000	16.00000000000023	16.00000000000000
8	0.4687500000000000	319.1999999999996	16.00000000000000
9	0.5312500000000000	-319.1999999999998	-16.00000000000000
10	0.5937500000000000	-15.99999999999997	-16.00000000000000
11	0.6562500000000000	-16.00000000000007	-16.00000000000000
12	0.7187500000000000	-142.8000000000000	-16.00000000000000
13	0.7812500000000000	-154.7999999999999	-32.00000000000000
14	0.8437500000000000	-32.00000000000011	-32.00000000000000
15	0.9062500000000000	-31.99999999999985	-32.00000000000000
16	0.9687500000000000	-24.00000000000007	-32.00000000000000

table 1-1

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0312500000000000	-47.58204929688065	-47.97656250000000
2	0.0937500000000000	-47.75789537441226	-47.78906250000000
3	0.1562500000000000	-47.38301739605985	-47.41406250000000
4	0.2187500000000000	86.49249017694321	-46.85156250000000
5	0.2812500000000000	128.6939906464990	9.377343750000000
6	0.3437500000000000	9.103027059826824	9.108593750000000
7	0.4062500000000000	8.803124677044815	8.808593750000000
8	0.4687500000000000	159.9733295089506	8.477343750000000
9	0.5312500000000000	-159.9733295089506	-8.477343750000000
10	0.5937500000000000	-8.803124677044857	-8.808593750000000
11	0.6562500000000000	-9.103027059326882	-9.108593750000000
12	0.7187500000000000	-72.73043237154724	-9.377343750000000
13	0.7812500000000000	-78.71637495578655	-17.36718750000000
14	0.8437500000000000	-17.04393238986118	-17.05468750000000
15	0.9062500000000000	-16.66905441250875	-16.67968750000000
16	0.9687500000000000	107.9310622030501	-16.24218750000000

table 1-2

I	X	H(X)	EXACT
0	0.0000000000000000	-47.96876423567291	-48.00000000000000
1	0.0625000000000000	-47.87504474135488	-47.90625000000000
2	0.1250000000000000	-47.59388625832049	-47.62500000000000
3	0.1875000000000000	-47.12528876663013	-47.15625000000000
4	0.2500000000000000	234.1480184524233	-46.50000000000000
5	0.3125000000000000	9.241263313975469	9.246875000000000
6	0.3750000000000000	8.956980847816621	8.962499999999999
7	0.4375000000000000	162.1415041043650	8.646875000000000
8	0.5000000000000000	-153.7999479360352	-8.300000000000000
9	0.5625000000000000	-8.641458550211773	-8.646875000000000
10	0.6250000000000000	-8.956980847816503	-8.962500000000000
11	0.6875000000000000	-9.241263313975552	-9.246875000000000
12	0.7500000000000000	-138.2104899810773	-9.500000000000000
13	0.8125000000000000	-17.20794150495287	-17.21875000000000
14	0.8750000000000000	-16.86430335904650	-16.87500000000000
15	0.9375000000000000	-16.45818555024803	-16.46875000000000
16	1.0000000000000000	239.8438211783645	-16.00000000000000

table 2

n=32

I	X	H(X)	H(X)
1	0.015625000000000	1737.331368161832	-15.67263648157728
2	0.046875000000000	-5211.994194062081	47.01790942045342
3	0.078125000000000	19110.64505076499	-172.3990010964042
4	0.109375000000000	-71230.58610494999	642.5780947784444
5	0.140625000000000	265811.6993720854	-2397.913377889815
6	0.171875000000000	-992016.2113794717	8949.075416807210
7	0.203125000000000	3702253.146137998	-33398.38828943274
8	0.234375000000000	-7525540.373163557	26340.47774101518
9	0.265625000000000	7525540.346509026	26340.47732527111
10	0.296875000000000	-3702253.012870617	-33398.38704199150
11	0.328125000000000	992015.7049744930	8949.070842618813
12	0.359375000000000	-265809.8070273368	-2397.896328519852
13	0.390625000000000	71223.52313348831	642.5144717026910
14	0.421875000000000	-19084.28550511840	-172.1615587478812
15	0.453125000000000	5113.618887850606	46.13176374283208
16	0.484375000000000	-1370.190050184564	-12.36549641066904
17	0.515625000000000	367.1413164478471	3.330221856332389
18	0.546875000000000	-98.37521759779953	-0.9553910654776311
19	0.578125000000000	26.35955794204034	0.4913429029417491
20	0.609375000000000	-7.063020585994520	-1.009981482503683
21	0.640625000000000	1.892529108613402	3.548583955713464
22	0.671875000000000	-0.5070995612876068	-13.18435485838989
23	0.703125000000000	0.1358748667007297	49.18883555523795
24	0.734375000000000	-0.3640599645795861D-01	-183.5709872337707
25	0.765625000000000	0.9753910817141371D-02	685.0951133489710
26	0.796875000000000	-0.2613143306979761D-02	-2556.809466340206
27	0.828125000000000	0.7004418965011062D-03	9542.142752269943
28	0.859375000000000	-0.1888129194539475D-03	-35611.76154301333
29	0.890625000000000	0.5238502311768512D-04	132904.9034200301
30	0.921875000000000	-0.1537747660470092D-04	-496007.8521371457
31	0.953125000000000	0.4596195692870770D-05	1851126.505128365
32	0.984375000000000	-0.1560326666876273D-05	-3762770.168376140

table 3

table 4

n=32

I	X	H(X)	H(X)
1	0.0156250000000000	-5320.789388577136	0.7346548343451994
2	0.0468750000000000	602.3681658188463	-2.203964502794056
3	0.0781250000000000	-160.6832750314666	8.081203175795061
4	0.1093750000000000	40.36493485095298	-30.12084819366994
5	0.1406250000000000	-0.7764646523384775	112.4021895896656
6	0.1718750000000000	-37.25907650692216	-419.4879101629632
7	0.2031250000000000	149.8127711529787	1565.549451066830
8	0.2343750000000000	-1329.992008470973	-7378.709894111641
9	0.2656250000000000	1330.155263027047	-7378.709874611498
10	0.2968750000000000	-150.6290439310428	1565.549392549365
11	0.3281250000000000	40.36091286461515	-419.4876955759186
12	0.3593750000000000	-10.81460727809973	112.4013897424186
13	0.3906250000000000	2.897515359593233	-30.11786338993511
14	0.4218750000000000	-0.7754527510928088	8.070063830865188
15	0.4531250000000000	0.2042944050369363	-2.162391959670990
16	0.4843750000000000	-0.4172447119179563D-01	0.5795040293844105
17	0.5156250000000000	-0.3739631130651403D-01	-0.1556241613120094
18	0.5468750000000000	0.1913098708583602	0.4299260840421302D-01
19	0.5781250000000000	-0.7278446259004288	-0.1634627722997734D-01
20	0.6093750000000000	2.720071286500161	0.2239252588173656D-01
21	0.6406250000000000	-10.15244307999565	-0.7322385471847000D-01
22	0.6718750000000000	37.88970240823755	0.2705029037625085
23	0.7031250000000000	-141.4063667771646	-1.008787745947038
24	0.7343750000000000	527.7357644637512	3.764648053510718
25	0.7656250000000000	-1969.536691115091	-14.04980445154437
26	0.7968750000000000	7350.411000511588	52.43456975295457
27	0.8281250000000000	-27432.10731153547	-195.6884745731474
28	0.8593750000000000	102378.0182462105	730.3193285601903
29	0.8906250000000000	-382079.9656738614	-2725.588839681962
30	0.9218750000000000	1425941.844449276	10172.03603016352
31	0.9531250000000000	-5321687.412122683	-37962.55528095704
32	0.9843750000000000	10815303.80404095	335214.1850936532

table 5

table 6

n=32

I	X	H(X)	H(X)	H(X)
1	0.015625	4215601[illegible]7.[illegible]33213	-2621888.3[illegible]613[illegible]568	-33[illegible]755[illegible].[illegible]524[illegible]3[illegible]7
2	0.046875	-739[illegible]3036[illegible].[illegible]239643	4596284.743896447	17[illegible]883[illegible].[illegible]6587891
3	0.078125	161299[illegible]6[illegible]024970	-1[illegible]31569.43887986	-5519174.59986[illegible]18[illegible]
4	0.109375	-370[illegible]1072[illegible]84[illegible]652378	23[illegible]13237.54311274	2555885.[illegible]25196969
5	0.140625	856348[illegible]12[illegible]780372	-53142[illegible]14.57797416	-515[illegible]66.72[illegible]7979[illegible]5
6	0.171875	-19578543164.18159	119[illegible]45828.1568617	-1158313.664951213
7	0.203125	3946731428[illegible].25936	-176124582.1460573	4276656.524337945
8	0.234375	-5576475231[illegible].06299	94162149.30264316	-817991[illegible].512742908
9	0.265625	55764554[illegible]73.93351	94159345.08535631	8235528.269704700
10	0.296875	-3946657[illegible]285.37995	-176119066.5330314	-4485395.365843220
11	0.328125	19576693143.85383	119[illegible]35[illegible]99.8180801	1677375.474392152
12	0.359375	-855913[illegible]914.451663	-53117495.99037051	-7[illegible]5379.3911696067
13	0.390625	369[illegible]943522.070469	22956193.15467549	289248.7152513449
14	0.421875	-1589472682.167458	-9899146.246055190	-91989.27223079961
15	0.453125	684398143.5591532	4288764.554124361	-35959.512[illegible]1696621
16	0.484375	-294685415.7717284	-19[illegible]7695.584559539	19[illegible]989.0931367031
17	0.515625	126884273.3441425	9632[illegible]2.7486476450	-489851.1698907051
18	0.546875	-54633225.51031584	-744[illegible]51.1839966873	1157602.445407117
19	0.578125	2352371[illegible].72756353	1[illegible]85209.[illegible]08139603	-2697[illegible]91.821375287
20	0.609375	-1[illegible]128715.95670939	-2243583.636875068	6267627.[illegible]41106525
21	0.640625	4361168.1[illegible]3538525	5[illegible]91487.089591823	-14557993.67866359
22	0.671875	-1877897.9[illegible]0265[illegible]6	-11773529.73249938	33811242.58001830
23	0.703125	8[illegible]8535.69[illegible]1811832	27321617.64362457	-78526914.99625432
24	0.734375	-348132.71[illegible]6286473	-63444225.56342019	182374733.2363393
25	0.765625	149893.99[illegible]6927694	147343435.8283725	-423560537.8994922
26	0.796875	-64537.493[illegible]4641448	-342198997.3907697	9837[illegible]6514.0738188
27	0.828125	27785.4[illegible]4541337	7947354[illegible]3.9848818	-2284598686.590731
28	0.859375	-11962.[illegible]71[illegible]5659658	-1945471757.[illegible]53795	53[illegible]51153[illegible]3.842470
29	0.890625	5155.7751[illegible]3954965	42795595[illegible]5.463910	-123[illegible]23[illegible]1178.289[illegible]7
30	0.921875	-2241.27[illegible]3[illegible]7816284	-978833269[illegible].256147	28138079636.84232
31	0.953125	1[illegible]23.4019[illegible]575[illegible]147	19233252877.58507	-55286592[illegible]34.945[illegible]6
32	0.984375	-592.2[illegible]17[illegible]2607071	-278822[illegible]2[illegible]91.18059	8[illegible]144774142.74372

table 7 table 8 table 9

n=32

I	X	H(X)	H(X)	H(X)
1	0.015625	165891.46[illegible]4990992	5175[illegible]91.564250568	-5660.091791525307
2	0.046875	-290815.91[illegible]5168687	-625264.8207496059	9957.668029024398
3	0.078125	634739.31[illegible]0375043	200598.6990952287	-21734.32864478976
4	0.109375	-1456658.7[illegible]9620210	-30878.56362978963	49881.02085924073
5	0.140625	3375655.0[illegible]2842713	-1114[illegible]5.8521778662	-115652.2194598619
6	0.171875	-7839960.8[illegible]6472811	344494.7407928518	269938.4762974592
7	0.203125	18284136.[illegible]0798724	-1001[illegible]72.246370914	-660522.1572000846
8	0.234375	-12803220.[illegible]8764261	8187593.666764380	2437580.575599991
9	0.265625	-12803037.[illegible]1741745	-8189509.385418913	2437204.728722954
10	0.296875	18283814.[illegible]4310309	1008361.819097752	-659862.6799125159
11	0.328125	-7839258.1[illegible]1993375	-362372.2816827758	268498.1631025129
12	0.359375	3374042.5[illegible]5148672	153432.5645390312	-112344.1367477066
13	0.390625	-1452922.3[illegible]1218930	-67167.05011430837	42208.37147217938
14	0.421875	626065.4808721241	31767.93387984767	-3912.108574781341
15	0.453125	-270673.0305839035	-20305.70236693527	-31440.11757133446
16	0.484375	119111.0690790999	24135.77754963674	90470.91110856257
17	0.515625	-57245.733[illegible]3907631	-46142.04214736052	-217634.4177499927
18	0.546875	38489.413[illegible]5169998	102896.4805379962	508692.0543176151
19	0.578125	-48717.632[illegible]0216237	-237137.7145949203	-1182823.232149582
20	0.609375	95632.668[illegible]4888941	549955.5721220918	2747679.765627468
21	0.640625	-214563.80[illegible]1783296	-1276916.997297496	-6381674.152111402
22	0.671875	495071.99[illegible]8332370	2965459.447298429	14821381.65005187
23	0.703125	-1148393.6[illegible]6757809	-6887138.263804957	-34422316.24722999
24	0.734375	2666512.2[illegible]6077443	15995170.88852169	79944947.79362934
25	0.765625	-6192646.8[illegible]3235027	-37148359.94319665	-185670087.2420016
26	0.796875	14382170.[illegible]6678092	86276221.85711330	431214587.6245684
27	0.828125	-33402675.[illegible]4332413	-200377314.0367745	-1001499832.582219
28	0.859375	77588594.[illegible]6739509	465441703.4664543	2326310151.663742
29	0.890625	-180470674[illegible]8251179	-108[illegible]614969.210208	-5410984169.638559
30	0.921875	425477688[illegible]6562925	255[illegible]370715.787762	12756899470.36312
31	0.953125	-113525615[illegible].145101	-681[illegible]157621.488678	-34[illegible]36995157.9923[illegible]
32	0.984375	208616420[illegible].495737	125[illegible]5786733.50885	62416948926.85268

table 10 table 11 table 12

I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	-1.49999999999991	-1.99999999999999	-0.500000000000079
2	0.046875	-1.99999999999992	-1.99999999999999	-0.754951656745106D-14
3	0.078125	-2.00000000000004	-1.99999999999999	0.444089209850062D-14
4	0.109375	-1.99999999999993	-1.99999999999999	-0.643929354282590D-14
5	0.140625	-2.00000000000000	-1.99999999999999	0.888178419700125D-15
6	0.171875	-1.99999999999994	-1.99999999999999	-0.532907051820075D-14
7	0.203125	-2.00000000000002	-1.99999999999999	0.310862446895043D-14
8	0.234375	-1.87500000000002	-1.99999999999999	-0.124999999999977
9	0.265625	-1.12500000000029	-0.999999999999990	0.125000000000297
10	0.296875	-1.00000000000026	-0.999999999999990	0.270894418008538D-13
11	0.328125	-0.999999999999293	-0.999999999999990	-0.706656955173912D-13
12	0.359375	-1.00000000000063	-0.999999999999990	0.639488462184090D-13
13	0.390625	-0.999999999999942	-0.999999999999990	-0.571764857681955D-14
14	0.421875	-0.999999999999466	-0.999999999999990	-0.533739719088543D-13
15	0.453125	-1.00000000000010	-0.999999999999990	0.104360964314764D-13
16	0.484375	-1.00000000000088	-0.999999999999990	0.888178419700125D-13
17	0.515625	-0.999999999998811	-0.999999999999990	-0.118793863634891D-12
18	0.546875	-1.00000000000008	-0.999999999999990	0.843769498715118D-14
19	0.578125	-1.00000000000100	-0.999999999999990	0.100364161426114D-12
20	0.609375	-0.999999999999777	-0.999999999999990	-0.222322160681187D-13
21	0.640625	-0.999999999999143	-0.999999999999990	-0.856537063498308D-13
22	0.671875	-1.00000000000086	-0.999999999999990	0.863753513158371D-13
23	0.703125	-1.00000000000009	-0.999999999999990	0.954791801177634D-14
24	0.734375	-1.00000000000074	-0.999999999999990	0.746069872548105D-13
25	0.765625	-0.999999999998315	-0.999999999999990	-0.168393077260020D-12
26	0.796875	-1.00000000000074	-0.999999999999990	0.748290318597355D-13
27	0.828125	-0.999999999998748	-0.999999999999990	-0.125149890450870D-12
28	0.859375	-1.00000000000167	-0.999999999999990	0.168087765928248D-12
29	0.890625	-0.999999999997920	-0.999999999999990	-0.207917016936676D-12
30	0.921875	-0.999999999999943	-0.999999999999990	-0.566213742558829D-14
31	0.953125	-1.00000000000158	-0.999999999999990	0.158317803311547D-12
32	0.984375	1471.25000000000	-0.999999999999990	-1472.25000000000

table 13

n=32

I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	-2.53124999999998	-2.53124999999999	-0.888178419700125D-15
2	0.046875	-7.59375000000014	-7.59374999999999	0.150990331349021D-13
3	0.078125	-12.6562499999997	-12.6562499999999	-0.182076576038525D-13
4	0.109375	-17.7187499999993	-17.7187499999999	-0.639488462184090D-13
5	0.140625	-22.7812500000001	-22.7812499999999	0.177635683940025D-13
6	0.171875	-27.8437499999996	-27.8437499999999	-0.355271367880050D-13
7	0.203125	-32.9062500000009	-32.9062499999999	0.923705556488130D-13
8	0.234375	-37.7187499999976	-37.9687499999999	-0.250000000002344
9	0.265625	-36.7812500000007	-37.0312499999999	-0.249999999999218
10	0.296875	-30.0937499999999	-30.0937499999999	0.000000000000000D 00
11	0.328125	-23.1562499999997	-23.1562499999999	-0.213162820728030D-13
12	0.359375	-16.2187499999973	-16.2187499999999	-0.266453525910037D-12
13	0.390625	-9.28125000000240	-9.28124999999999	0.241140440948583D-12
14	0.421875	-2.34374999999964	-2.34375000000000	-0.350830475781549D-13
15	0.453125	4.59374999999924	4.59374999999999	0.754951656745106D-13
16	0.484375	11.5312499999990	11.5312499999999	0.905941988094127D-13
17	0.515625	18.4687500000016	18.4687499999999	-0.166977542903623D-12
18	0.546875	25.4062499999994	25.4062499999999	0.497379915032070D-13
19	0.578125	32.3437499999977	32.3437499999999	0.220268248085631D-12
20	0.609375	39.2812500000022	39.2812499999999	-0.227373675443232D-12
21	0.640625	46.2187499999990	46.2187499999999	0.923705556488130D-13
22	0.671875	53.1562499999990	53.1562499999999	0.923705556488130D-13
23	0.703125	60.0937500000007	60.0937499999999	-0.781597009336110D-13
24	0.734375	67.0312499999986	67.0312499999999	0.127897692436818D-12
25	0.765625	73.9687500000013	73.9687499999999	-0.135003119794419D-12
26	0.796875	80.9062499999982	80.9062499999999	0.170530256582424D-12
27	0.828125	87.8437499999991	87.8437499999999	0.852651282912120D-13
28	0.859375	94.7812500000020	94.7812499999999	-0.206057393370429D-12
29	0.890625	101.718749999998	101.718749999999	0.113686837721616D-12
30	0.921875	108.656249999999	108.656249999999	0.710542735760100D-13
31	0.953125	115.593749999999	115.593749999999	0.639488462184090D-13
32	0.984375	91.0312500000011	122.531249999999	31.4999999999988

table 14

I	X	H(X)	I	X	H(X)
1	0.0156250000000000	3326.069828547172	17	0.5156250000000000	-1486.596663762598
2	0.0468750000000000	124.5606186822797	18	0.5468750000000000	-712.5705575166967
3	0.0781250000000000	-1356.928101627163	19	0.5781250000000000	1078.854420066121
4	0.1093750000000000	309.7412374977875	20	0.6093750000000000	-426.8039472356750
5	0.1406250000000000	832.6298657314019	21	0.6406250000000000	736.6743553871212
6	0.1718750000000000	-161.1014902021756	22	0.6718750000000000	4.567746133511921
7	0.2031250000000000	227.5113129775940	23	0.7031250000000000	-1597.201599920831
8	0.2343750000000000	-532.5195190755524	24	0.7343750000000000	917.0774975431972
9	0.2656250000000000	-917.1166097137306	25	0.7656250000000000	532.5353198437628
10	0.2968750000000000	1597.243627810404	26	0.7968750000000000	-227.6255046447390
11	0.3281250000000000	-4.593814903522717	27	0.8281250000000000	161.1917992293042
12	0.3593750000000000	-736.6767576686600	28	0.8593750000000000	-832.7865397138677
13	0.3906250000000000	426.7078865806211	29	0.8906250000000000	-309.7230307627963
14	0.4218750000000000	-1078.772384454125	30	0.9218750000000000	1356.876256105025
15	0.4531250000000000	712.6079187121344	31	0.9531250000000000	124.644140470[illegible]
16	0.4843750000000000	1486.582301274736	32	0.9843750000000000	-3325.908663002601

table 15

I	X	H(X)	H(X)	H(X)
1	0.0166666666666667	-0.5427206303413152D-15	0.3806087508708336D-01	-0.795821340040518l
2	0.0500000000000000	0.6263930795748833D-15	-0.165120914051282З	1.908815043982635
3	0.0833333333333333	-0.1080760381817431D-14	0.5381334650080578	-5.949691814441546
4	0.1166666666666666	0.1959917234634549D-14	-1.687457398864390	18.38530439259086
5	0.1499999999999999	-0.1524503310495905D-14	5.312502520183199	-58.23285140104934
6	0.1833333333333333	0.1524931030564583D-14	-16.80614797554523	187.2149967819480
7	0.2166666666666666	-0.1742856274466790D-14	58.14484472749917	-778.7030784062605
8	0.2499999999999999	14.99999999999999	0.1394347126157894D-12	1277.442320679785
9	0.2833333333333333	0.1031496972388431D-13	-58.14484472749935	-778.7030784062602
10	0.3166666666666666	-0.6536416638675364D-15	16.80614797554528	187.2149967819476
11	0.3499999999999999	-0.1770324772396580D-15	-5.312502520183221	-58.23285140104910
12	0.3833333333333333	0.4085461894751434D-15	1.687457398864387	18.38530439259066
13	0.4166666666666666	-0.7762554122121845D-15	-0.5381334650080495	-5.949691814441406
14	0.4499999999999999	0.7830825803718938D-15	0.1651209140512793	1.908815043982600
15	0.4833333333333333	-0.3132405409908499D-15	-0.3806087508708274D-01	-0.7958213400405222
16	0.5166666666666666	0.6537365408091385D-15	-0.3806087508708128D-01	0.7958213400405074
17	0.5499999999999999	-0.9806342127832655D-15	0.1651209140512728	-1.908815043982529
18	0.5833333333333333	0.8717061020109386D-15	-0.5381334650080326	5.949691814441184
19	0.6166666666666666	0.8717452839991307D-15	1.687457398864368	-18.38530439259030
20	0.6499999999999999	-0.1089746272545868D-15	-5.312502520183210	58.23285140104899
21	0.6833333333333333	-0.5340199654085903D-14	16.80614797554524	-187.2149967819481
22	0.7166666666666666	0.5231862833326740D-14	-58.14484472749916	778.7030784062608
23	0.7499999999999999	-14.99999999999999	-0.1657085625509233D-12	-1277.442320679785
24	0.7833333333333333	-0.1845545964124168D-13	58.14484472749936	778.7030784062594
25	0.8166666666666666	0.5833653181234834D-14	-16.80614797554528	-187.2149967819467
26	0.8499999999999999	-0.7080834284992211D-14	5.312502520183216	58.23285140104814
27	0.8833333333333333	0.4238177734215283D-14	-1.687457398864365	-18.38530439258987
28	0.9166666666666666	0.7054952545200314D-16	0.5381334650080281	5.949691814440999
29	0.9499999999999999	-0.8032390625734979D-15	-0.1651209140512686	-1.908815043982480
30	0.9833333333333333	0.3482622983695141D-15	0.3806087508708014D-01	0.7958213400405047

table 16

table 17

table 18

n=32

I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	16.78145821478244	20.36774193604165	3.586273721259211
2	0.046875	7.400603980209596	6.778354621176215	-0.622269359033810
3	0.078125	4.170157298472277	4.053892901838455	-0.116264396638222
4	0.109375	2.922515573655872	2.881571002559405	-0.4094557109646746D-01
5	0.140625	2.245606086065701	2.226601112207206	-0.1900497385849564D-01
6	0.171875	1.817105279697351	1.806767840653714	-0.1033743904361684D-01
7	0.203125	1.519758179725762	1.513521602158887	-0.6236577566875123D-02
8	0.234375	1.300249068369546	1.296201258869036	-0.4047809500509203D-02
9	0.265625	1.130755781986870	1.127981925964580	-0.2773856022290522D-02
10	0.296875	0.995311588037571	0.993329396171682	-0.1982191865888383D-02
11	0.328125	0.884087761109396	0.882523435047096	-0.1464326062300417D-02
12	0.359375	0.790697531286581	0.789586283980104	-0.1111247306476854D-02
13	0.390625	0.710807602521002	0.709945451747046	-0.8621507739558915D-03
14	0.421875	0.641372073557177	0.640690790018277	-0.6812835388994437D-03
15	0.453125	0.580185633196145	0.579638953666717	-0.5466795294275101D-03
16	0.484375	0.525610755282106	0.525166423119930	-0.4443321621762780D-03
17	0.515625	0.476404593958427	0.476039573350462	-0.3650206079649221D-03
18	0.546875	0.431605469900246	0.431302966128370	-0.3025037718763363D-03
19	0.578125	0.390456282732316	0.390203829826971	-0.2524529053449659D-03
20	0.609375	0.352351529988168	0.352139730432522	-0.2117995564612500D-03
21	0.640625	0.316799833542076	0.316621508088784	-0.1783254532922995D-03
22	0.671875	0.283396899147264	0.283246501365172	-0.1503977820924846D-03
23	0.703125	0.251805644153447	0.251678849899647	-0.1267942538002581D-03
24	0.734375	0.221741341980458	0.221634756945432	-0.1065850350258357D-03
25	0.765625	0.192960334599668	0.192871283135560	-0.8905146410768949D-04
26	0.796875	0.165251317709399	0.165177688672167	-0.7362903723207026D-04
27	0.828125	0.138425501753058	0.138368635070207	-0.5986668285067054D-04
28	0.859375	0.112326151776033	0.112278754658564	-0.4739711746858111D-04
29	0.890625	0.8679414489458570D-01	0.8675823006892808D-01	-0.3591482565762361D-04
30	0.921875	0.6169477737754317D-01	0.6166911806836952D-01	-0.2515930917365052D-04
31	0.953125	0.3689717730902990D-01	0.3688221576122477D-01	-0.1490196967821565D-04
32	0.984375	0.1227924650426120D-01	0.1227431105446283D-01	-0.4935449798368872D-05

table 19

I	X	H(X)	EXACT	ERROR(ABS.)
1	0.015625	10.17568926177400	10.17773381249359	0.2044550719581871D-02
2	0.046875	3.37004907547966	3.370726202707493	0.6771272278325301D-03
3	0.078125	1.99571090360208	1.996111891885041	0.4009882829583144D-03
4	0.109375	1.39712566372161	1.397406386245238	0.2807175236259062D-03
5	0.140625	1.05694881129755	1.057161178774320	0.2123674767640082D-03
6	0.171875	0.8340302487810	0.834199602791753	0.1675779136478816D-03
7	0.203125	0.674035259308896	0.674171956743360	0.1354308124704161D-03
8	0.234375	0.551554166826550	0.551664987866737	0.1108210401868786D-03
9	0.265625	0.453082548826490	0.453173584509573	0.9103562692451549D-04
10	0.296875	0.370753780022620	0.370825273136017	0.7449311339741137D-04
11	0.328125	0.299623264021573	0.299688466840961	0.6020281938798332D-04
12	0.359375	0.236434882258701	0.236482387945659	0.4750568695803536D-04
13	0.390625	0.178865921614764	0.178902860657262	0.3593884249726563D-04
14	0.421875	0.125215320600221	0.125243480095652	0.2515949543130390D-04
15	0.453125	0.7415379455606640D-01	0.7416799376917370D-01	0.1489921310725283D-04
16	0.484375	0.2455849046918018D-01	0.2456342488473368D-01	0.4934415553496835D-05
17	0.515625	-0.2455849046918023D-01	-0.2456342488473362D-01	-0.4934415553385813D-05
18	0.546875	-0.7415379455606500D-01	-0.7416799376917360D-01	-0.1489921310773855D-04
19	0.578125	-0.125215320600221	-0.125243480095652	-0.2515949543072104D-04
20	0.609375	-0.178865921614764	-0.178902860657261	-0.3593884249780687D-04
21	0.640625	-0.236434882258702	-0.236482387945659	-0.4750568695752188D-04
22	0.671875	-0.299623264021575	-0.299688466840961	-0.6020281938785842D-04
23	0.703125	-0.370753780022620	-0.370825273136017	-0.7449311339716157D-04
24	0.734375	-0.453082548826491	-0.453173584509573	-0.9103562692425182D-04
25	0.765625	-0.551554166826550	-0.551664987866737	-0.1108210401868647D-03
26	0.796875	-0.674035259308907	-0.674171956743360	-0.1354308124694447D-03
27	0.828125	-0.834032024878105	-0.834199602791753	-0.1675779136501853D-03
28	0.859375	-1.05694881129756	-1.057161178774320	-0.2123674767589011D-03
29	0.890625	-1.39712566372160	-1.397406386245237	-0.2807175236310132D-03
30	0.921875	-1.99571090360209	-1.996111891885042	-0.4009882829512089D-03
31	0.953125	-3.37004907547965	-3.370726202707492	-0.6771272278334183D-03
32	0.984375	-10.17568926177402	-10.17773381249360	-0.2044550719574988D-02

table 20

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	0.2506948534502686	0.2505042281878168
2	0.0428571428571429	0.2547699197175119	0.2545872989791897
3	0.0714285714285714	0.2632454042028133	0.2630237709004217
4	0.0999999999999999	0.2765344742107287	0.2763932022500209
5	0.1285714285714285	0.2960663469295542	0.2956720735920432
6	0.1571428571428571	0.3221678098819683	0.3223940764471994
7	0.1857142857142857	0.3604321177888303	0.3589310950166984
8	0.2142857142857142	0.4059874697560220	0.4089909514938964
9	0.2428571428571428	0.4876646741005014	0.4765307969761674
10	0.2714285714285714	0.5544903969584709	0.5775227671137245
11	0.2999999999999999	0.7865459170569358	0.7236067977499789
12	0.3285714285714285	0.7845016107085745	0.9503330524849029
13	0.3571428571428571	1.772398677220789	1.327985277605681
14	0.3857142857142856	0.8424569897240144	2.024877367989037
15	0.4142857142857142	6.710494214156844	3.532290629821093
16	0.4428571428571428	-1.068467734764274	7.841276337339169
17	0.4714285714285714	65.69088869226190	31.11308027605091
18	0.4999999999999999	-158.0336571665146	0.6657734470283928D 32
19	0.5285714285714285	65.69088869226188	31.11308027605100
20	0.5571428571428571	-1.068467734764405	7.841276337339180
21	0.5857142857142856	6.710494214157019	3.532290629821096
22	0.6142857142857142	0.8424569897238807	2.024877367989038
23	0.6428571428571428	1.772398677220875	1.327985277605682
24	0.6714285714285714	0.7845016107085363	0.9503330524849033
25	0.6999999999999999	0.7865459170569509	0.7236067977499791
26	0.7285714285714285	0.5544903969584684	0.5775227671137246
27	0.7571428571428571	0.4876646741004990	0.4765307969761675
28	0.7857142857142856	0.4059874697560256	0.4089909514938964
29	0.8142857142857142	0.3604321177888272	0.3589310950166985
30	0.8428571428571428	0.3221678098819721	0.3223940764471994
31	0.8714285714285714	0.2960663469295521	0.2956720735920433
32	0.8999999999999999	0.2765344742107280	0.2763932022500210
33	0.9285714285714285	0.2632454042029163	0.2630237709004217
34	0.9571428571428571	0.2547699197175078	0.2545872989791897
35	0.9857142857142856	0.2506948534502766	0.2505042281878168

table 21

I	X	H(X)	EXACT
1	0.0142857142857143	-0.1335978759145468	0.1260099818520260
2	0.0428571428571429	-0.1196270765502311	0.1343008578299263
3	0.0714285714285714	-0.1395228860535119	0.1520652534516435
4	0.0999999999999999	-0.4285669101634781D-01	0.1819660112501051
5	0.1285714285714285	-0.2276973042277730	0.2288597770212687
6	0.1571428571428571	0.3871641940555206	0.3012335667222565
7	0.1857142857142857	-1.048686692389973	0.4140580908092333
8	0.2142857142857142	3.120264476854476	0.5946506389293999
9	0.2428571428571428	-7.395841355749013	0.8954195449517084
10	0.2714285714285714	21.70280765892563	1.423672512094435
11	0.2999999999999999	-53.80107024993991	2.418033988749894
12	0.3285714285714285	151.6092011470780	4.468464411386737
13	0.3571428571428571	-386.3627840031488	9.253284107618952
14	0.3857142857142856	1073.067579945055	22.57589276437623
15	0.4142857142857142	-2749.525556558890	71.33017193131029
16	0.4428571428571428	8150.531634160925	361.0724112537518
17	0.4714285714285714	-20258.59884396343	5777.029505307879
18	0.4999999999999999	28177.56508143316	0.2667520977972750D 65
19	0.5285714285714285	-20258.59884396344	5777.029505307911
20	0.5571428571428571	8150.531634160958	361.0724112537528
21	0.5857142857142856	-2749.525556558926	71.33017193131040
22	0.6142857142857142	1073.067579945080	22.57589276437626
23	0.6428571428571428	-386.3627840031646	9.253284107618963
24	0.6714285714285714	151.6092011470856	4.468464411386741
25	0.6999999999999999	-53.80107024994343	2.418033988749896
26	0.7285714285714285	21.70280765892714	1.423672512094435
27	0.7571428571428571	-7.395841355748925	0.8954195449517090
28	0.7857142857142856	3.120264476853919	0.5946506389294002
29	0.8142857142857142	-1.048686692389211	0.4140580908092334
30	0.8428571428571428	0.3871641940543687	0.3012335667222566
31	0.8714285714285714	-0.2276973042267200	0.2288597770212688
32	0.8999999999999999	-0.4285669101657374D-01	0.1819660112501051
33	0.9285714285714285	-0.1395228860540207	0.1520652534516435
34	0.9571428571428571	-0.1196270765493881	0.1343008578299263
35	0.9857142857142856	-0.1335978759152272	0.1260099818520260

table 22