

## 有理関数系による関数近似とその応用

舞鶴高専 北原紀之  
矢野秀雄

有理関数による関数近似の有効性は、従来よく知られている。しかし、有理関数近似は、一般に、未定パラメータに対して非線型であり、近似する関数の特殊性に依存することが多く、理論的にも実用的にも困難な点がある[1], [2], [3]。本研究において、われわれは、複素関数論的な立場から、極を仮定し未定パラメータに関して線型な新しい有理関数系を提案する。この関数系は、Cauchy 核の離散値として与えられるものであり、未定パラメータは、Cauchy の積分表示において積分を離散化することによって決められる。さらに、この関数系を基底関数系とする最小二乗近似について述べ、応用として微分方程式の境界値問題の近似解法について示れる。

### §1. 基底関数系

近似する関数  $f(x)$  の定義域を実軸上の閉区間

$$(1.1) \quad K = [-1, 1]$$

とする。Fig. 1 において、  
 $z$ -平面上に  $K$  の両端を焦点とする楕円  $\Gamma$  をとる。この楕円  $\Gamma$  は、 $w$ -平面における単位円  $\Gamma'$  を、関数

$$(1.2) \quad z = \frac{1}{2} \left( R w + \frac{1}{R w} \right)$$

による写像によって与えられる。ただし、 $R$  はパラメータである。単位円  $\Gamma'$  の上半円周上の  $n$  個の点

$$(1.3) \quad \begin{cases} w_j = e^{i\theta_j} \\ \theta_j = \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

を  $z$ -平面の楕円  $\Gamma$  の周上に写像した点を  $z_1, z_2, \dots, z_n$  とし、これらの点を極とする  $n$  個の有理関数系

$$(1.4) \quad \Phi_j(x) = \frac{1}{z_j - x}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

を考える。これは、後述するように Cauchy 核の離散値である。  $\Phi_j(x)$  の実部および虚部を構成する  $N=2n$  個の有理関数

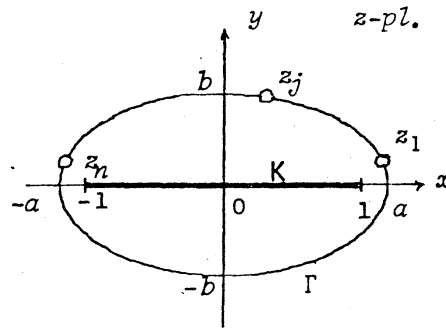
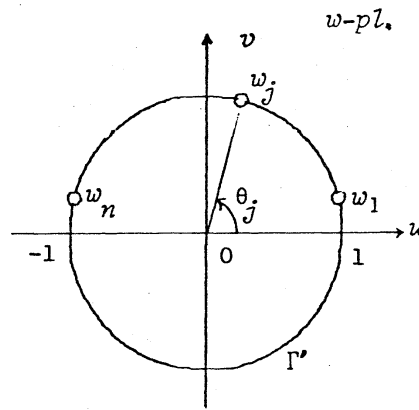


Fig. 1.

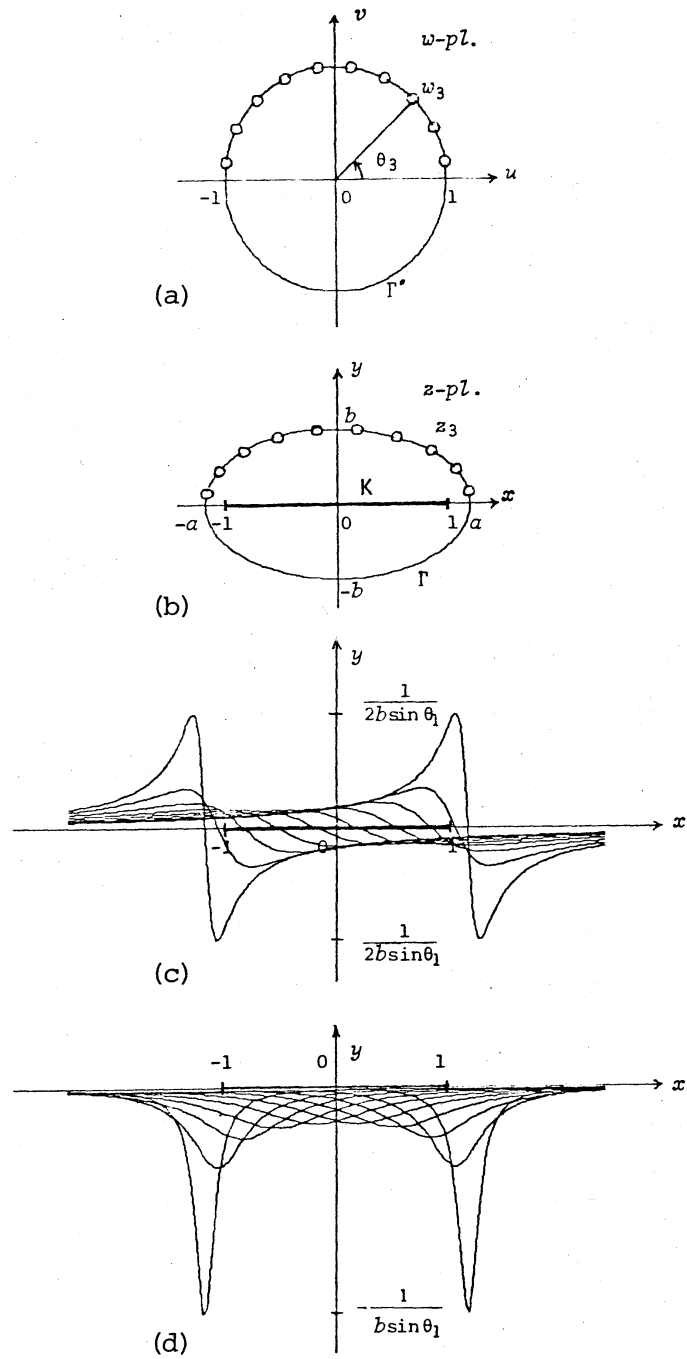


Fig. 2

系

$$(1.5) \quad \begin{cases} \varphi_j^{(N)}(x) = \operatorname{Re} [\bar{\psi}_j(x)] \\ \varphi_{j+n}^{(N)}(x) = \operatorname{Im} [\bar{\psi}_j(x)] \end{cases}$$

を基底関数系として提案する。

Fig. 2 は、極の個数を  $n=10$  とした場合に現われる  $N=20$  個の基底関数系の形状を図示したものである。写像関数(1.2) によって、Fig. 2-a の単位円  $P'$  上の点  $w_j$  は、Fig. 2-b の楕円  $P$  上の点  $z_j$  に写像される。Fig. 2-c は、有理関数  $\bar{\psi}_j(x)$  の実部  $\varphi_j^{(20)}(x)$  を表わし、Fig. 2-d は、その虚部  $\varphi_{j+10}^{(20)}(x)$  を表わす。

## § 2. Cauchy の積分表示による関数近似

基底関数系(1.5)は、Cauchy の積分表示において積分を離散化することによって得られる。すなわち、Cauchy の積分表示を利用すれば、本関数系による解析関数  $f(x)$  の近似が可能である。本章ではその近似の理論と数値計算例について述べる。  $f(x)$  は、前章で定義した  $z$ -平面上の楕円  $P$  の内部および周上で正則であるとする。Cauchy の積分表示により、

$$(2.1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_P \frac{f(z)}{z-x} dz$$

と表わされる。ここに、 $P$  は、 $K$  を囲む右回りの積分路である。式(2.1)の積分は、一様に近似される。一方、 $w$ -平面上

の単位円  $P'$  の全周上に前述と同様に  $N=2n$  個の分点

$$(2.2) \quad \begin{cases} w_j = e^{i\theta_j} \\ \theta_j = \frac{2j-1}{N} \pi, \quad (j=1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

をとると

$$(2.3) \quad w_{2n-j+1} = \bar{w}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

が成立し, 式(2.3)と関数(1.2)より

$$(2.4) \quad z_{2n-j+1} = \bar{z}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

である. さらに,  $P'$  の上半周上の点を

$$(2.5) \quad \begin{cases} w_j^* = e^{i\theta_j^*} \\ \theta_j^* = \frac{j-1}{n} \pi, \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

にとる.  $w_j^*$  の  $z$ -平面への写像点を  $z_j^*$  とする. 以上の関係を図示すると Fig. 3 のようになる.

$f(z)$  は, 実数値関数であるから

$$(2.6) \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

を考慮すると, 式(2.1)は, つぎのように変形される.

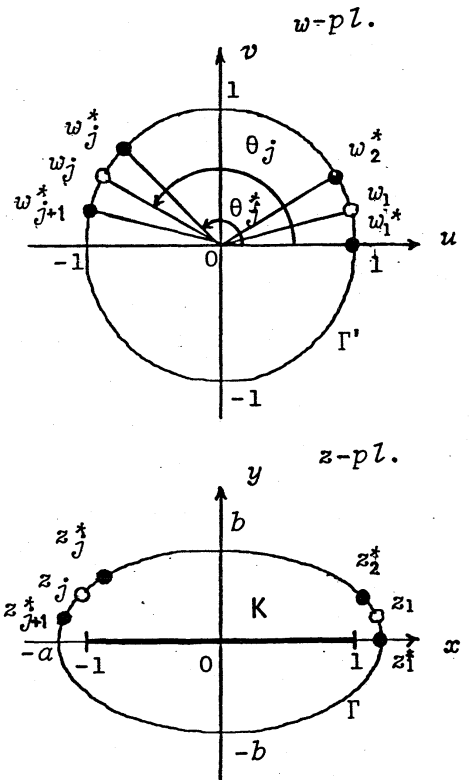


Fig. 3

$$(2.7) \quad f(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\theta_j^*}^{\theta_{j+1}^*} \left\{ \frac{f(z) \left( R_w - \frac{1}{R_w} \right)}{z - x} + \frac{\overline{f(z) \left( R_w - \frac{1}{R_w} \right)}}{\bar{z} - x} \right\} d\theta.$$

したがって、つぎのように近似する。

$$(2.8) \quad f^{(N)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{C_j^*}{z_j - x} - \frac{\overline{C_j^*}}{\bar{z}_j - x} \right\}.$$

ただし、

$$(2.9) \quad C_j^* \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_j^*}^{\theta_{j+1}^*} f(z) \left( R_w - \frac{1}{R_w} \right) d\theta$$

とする。さらに、

$$(2.10) \quad \begin{cases} C_j \equiv \operatorname{Re} [C_j^*], \\ C_{j+n} \equiv \operatorname{Im} [C_j^*], \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とすると、式(1.4), (1.5), (2.10)により

$$(2.11) \quad f^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j^{(N)}$$

を得る。こうして、Cauchyの積分表示を利用すれば、基底関数系  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  の1次結合により解析関数  $f(x)$  を一様に近似することができる。

上述の解法より、関数近似の一例を示す。この例は、 $f(x) = e^x$  の場合である。Fig. 4は、項数  $N$  (極の個数の2倍) をパラメータとして楕円  $\Gamma$  の長軸  $a$  を変化した場合の誤差を示す。ただし、誤差の二乗ノルムを

$$(2.12) \quad \|\varepsilon(x)\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 \{f(x) - f^{(N)}(x)\}^2 dx}$$

とする。

Fig. 5 は、 $a=1.8$ として、 $N$ を変化した場合の誤差を示す。グラフより、 $N=50$ を越えると急激に誤差が減少する。 $N=60$ 以上で飽和するのは、計算機の精度によるものと考えられる。

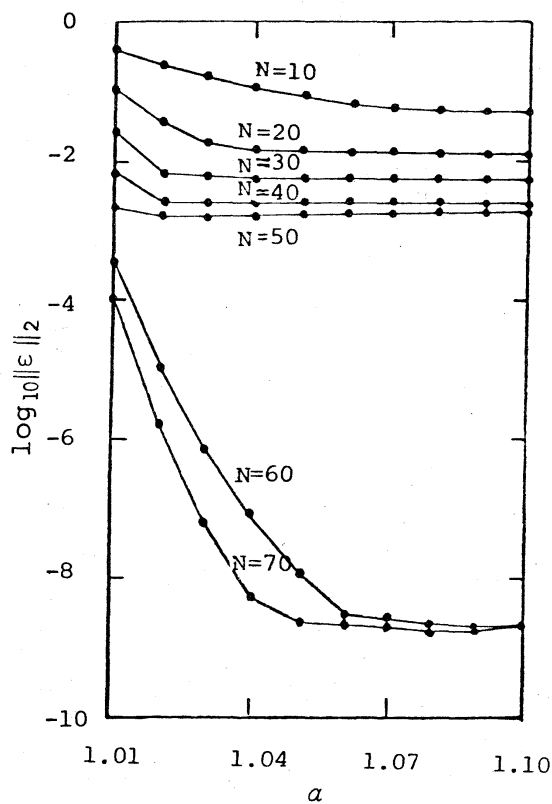


Fig. 4

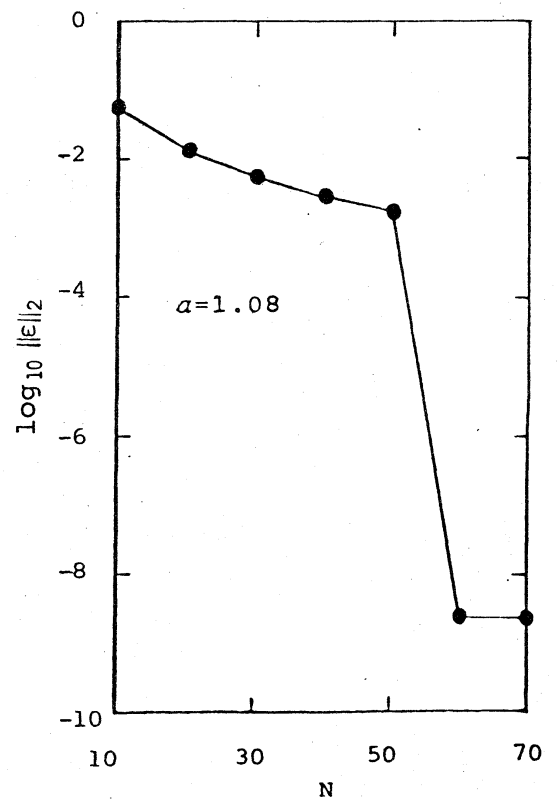


Fig. 5

### § 3. 最小二乗法

関数近似において Chebyshev 多項式が、多くの点で  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  によるものよりも優れていることが予想される。しかしながら、目的を別の面、たとえば、重みつき残差法による微分方

程式の近似解法などを考えると、基底関数の直交性が保存されなくなるので Chebyshev 展開はあまり有効でない。この意味では関数近似においても直交しない展開である  $\{x^j\}$  による展開と  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  による展開を Chebyshev 近似をベースとして比較することは意味があると考える。そこで、 $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  を基底関数系とする最小二乗近似について述べ、その数値実験の結果を示すことにする。

§ 2. において  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  により、任意の整多項式を表現できることが示されたので、Weierstrass の定理を考慮することにより  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  の 1 次結合によって、 $K$  で定義された任意の連続関数を一様に近似することができる。このことを示す。

Weierstrass の定理により、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、適当な自然数  $L$  を取れば、 $m > L$  に対し

$$(3.1) \quad \left| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j x^j \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。また、Cauchy の積分表示により

$$(3.2) \quad x^j = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^j}{z-x} dz.$$

さらに、式 (3.2) は、次式で定義される Riemann 和

$$(3.3) \quad \varphi_j^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^j (z_k - z_{k-1})}{z_k - x}$$



によつて一様に近似される。したがつて、式(3.2), (3.3)により

$$(3.4) \quad x^j - g_j^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ \frac{z^j}{z-x} - \frac{z_k^j}{z_k-x} \right\} dz$$

を得る。任意の正数  $\delta_j$  に対して適当な自然数  $L$  をとれば、 $N > L$  に対して

$$(3.5) \quad \left| \frac{z^j}{z-x} - \frac{z_k^j}{z_k-x} \right| < \delta_j$$

とすることができる。  $2\pi l$  を積分路  $\Gamma$  の長さとする

$$(3.6) \quad |x^j - g_j^{(N)}(x)| < l \delta_j \equiv \varepsilon_j.$$

式(3.1), (3.6) により

$$(3.7) \quad \left| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j g_j^{(N)}(x) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon + \sum_{j=0}^m |a_j| \varepsilon_j.$$

$a_0, a_1, \dots, a_m$  は、 $N$  に無関係な定数であるから、十分大きな  $N$  によつて

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^m |a_j| \varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。したがつて

$$(3.9) \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^N \frac{C_k^*}{z_k - x} \right| < \varepsilon.$$

ただし

$$(3.10) \quad c_k^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^m a_j z_k^j (z_k - z_{k-1}).$$

$\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  で表現すると

$$(3.11) \quad \left| f(x) - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j^{(N)}(x) \right| < \varepsilon$$

となる。したがって、 $K$  で定義される任意の連続関数は、 $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  の 1 次結合で表わすことができる。

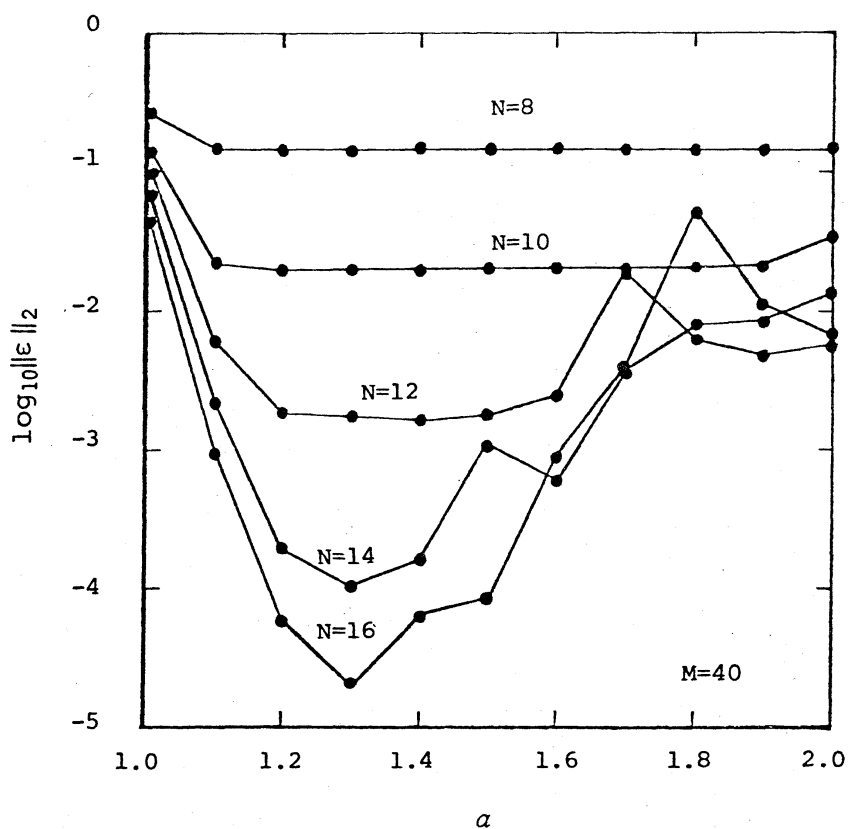


Fig. 6

つぎに、 $f(x) = \cos 2\pi x$  を最小二乗近似で解いた実験例を示す。Fig. 6 は、 $N$  をパラメータとして楕円 $\Gamma$ の長軸 $a$ を変化した場合の誤差を示す。これは、従来の関数近似には現れない特性であり、調整パラメータ $a$ の影響を表わすシミュレーション結果である。実験は、係数行列の要素を決定する際に生じる内積計算を、台形法によって行なったが、その分割数 $M$ を $M=40$ とした。われわれの種々のシミュレーション結果では、 $a$ の最適値は1と2の間に存在する。Fig. 7 は、

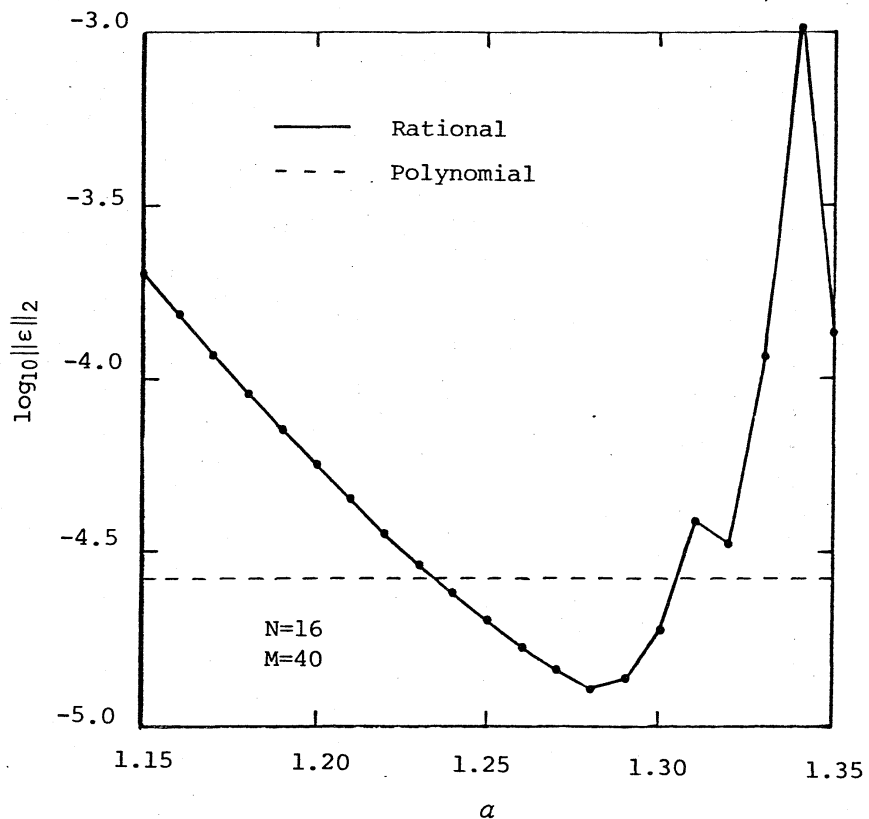


Fig. 7

$N=16$  として, Fig. 6 における  $\alpha$  の最適値近傍を拡大したものであり,  $\{x^j\}$  との比較を示している.

Fig. 8 は, Chebyshev 近似と  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  および  $\{x^j\}$  の展開による近似の比較を示したものである.

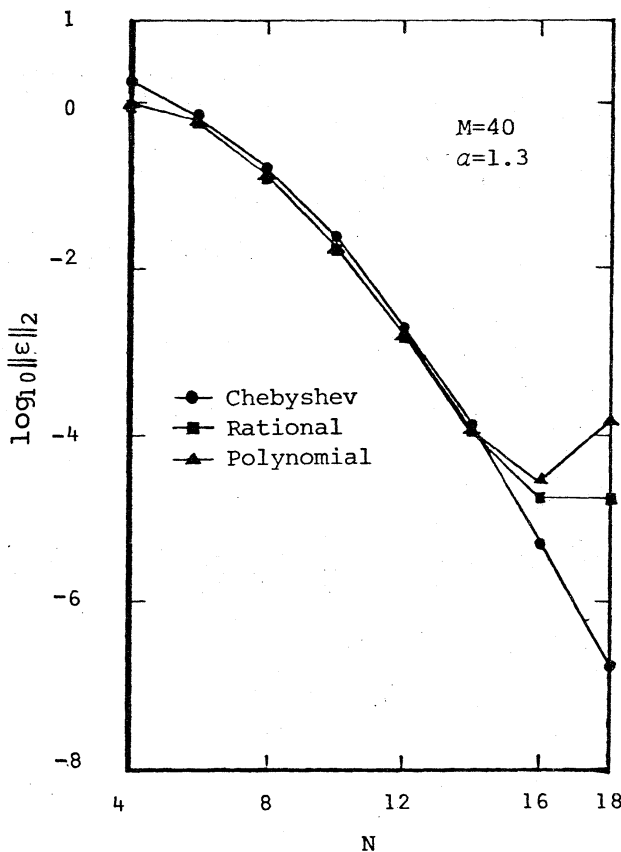


Fig. 8

本関数系  $\{\varphi_j^{(N)}(x)\}$  は, 微分方程式の境界値問題の近似解法に適用できる. 重みつき残差法で解く場合, 重み関数に何を選ぶかによって, かなり精度の点で違いがでてくる. しかし,

いずれの重みに対しても、われわれのシミュレーション結果では  $\{x_i\}$  と比較した場合、同等以上の精度を得た。さらに、本解法の特徴である調整パラメータ  $\alpha$  の最適値は、関数近似の場合と同様、有限の範囲に存在することが確認された。

#### § 4. おわりに

- (1) Cauchyの積分表示を使った本関数系による関数近似は、任意の解析関数に対して有効であるが、展開項数を多くとる必要がある。この点の改良の必要性がある。
- (2) 最小二乗法による解法では、少ない項数で精度の良い結果を得ることができるとは、パラメータ  $\alpha$  の最適値を決定する問題が生じる。
- (3) これらの関数近似における誤差解析については、現在検討中である。

#### 参考文献

- [1] Ralston, A., "Rational Chebyshev Approximation", *Mathematical Methods for Digital Computers*, 2, (1967), John Wiley, 264-284.

- [2] 渋谷政昭, "有理関数による最良近似について", 数理解析研究所講究録 73, (1969), 67-74.
- [3] 一松 信, "有理関数近似について", 数学, 20, (1968), 40-46.

### 訂正事項

個所	誤	正
P. 4 下より1行目	式(2.1) ... ...近似される.	削除
P. 7 2行目	$a = 1.8$	$a = 1.08$
P. 11 1行目	$f(x) = \cos 2\pi x$ ... ... 実験例 ...	$f(x) = \cos 2\pi x$ に対する 最小二乗近似の 実験例 ...