数理解析研究所講究録
第373巻 1979年 91-113

漸近級数の収束級数への変換
—— 特殊関数の計算機向き解析的表示

京大 数理研 森 正武

§1. 特殊関数の漸近展開

よく知られた特殊関数には多くの場合漸近展開が存在する．これらの漸近展開を導く原理は，次の積分指数関数 $E_1(z)$ の例に典型的に見ることができる．

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt=e^{-z}\int_0^\infty \frac{1}{t+z}e^{-t}dt=\frac{e^{-z}}{z}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{t}{z}}e^{-t}dt \tag{1.1}$$

$$=\frac{e^{-z}}{z}\int_0^\infty\left(1-\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}-\frac{t^3}{z^3}+\cdots\right)e^{-t}dt \tag{1.2}$$

$$=\frac{e^{-z}}{z}\left[1-\frac{1!}{z}+\frac{2!}{z^2}-\frac{3!}{z^3}+\cdots\right] \tag{1.3}$$

最後の級数 (1.3) がいかなる z に対しても収束しない漸近級数になっている理由は，(1.2) に現れる級数

$$f(z;t)\equiv\frac{1}{1+\frac{t}{z}}=1-\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}-\frac{t^3}{z^3}+\cdots \tag{1.4}$$

の収束円が $|t|<|z|$ であるにもかかわらず，(1.2) にお

いてその収束円を越えて$(0, \infty)$で項別積分を行って(1.3)を導いているからである.

そこで,もし(1.1)にうまい変数変換を適用して,積分を級数の収束円の内部で実行できる形に変換できるならば,漸近級数(1.3)の代わりに収束級数が得られることになる.

§2. 収束級数への変換の原理

上に挙げた積分指数関数について,その収束級数を導く原理を以下に示す.例として,1次変換

$$t=\phi(u)=\frac{2pu}{1-u}, \qquad u=\phi^{-1}(t)=\frac{t}{t+2p} \tag{2.1}$$

を考えよう.pは$\mathrm{Re}\, z>p$なる正の実数に固定しておくものとする.この変換は,t-平面の右半平面 $\mathrm{Re}\, t>-p$ を,u-平面の単位円$|u|<1$へ写像する(図1の点を打った領域).さらに,(1.1)に現れる積分を

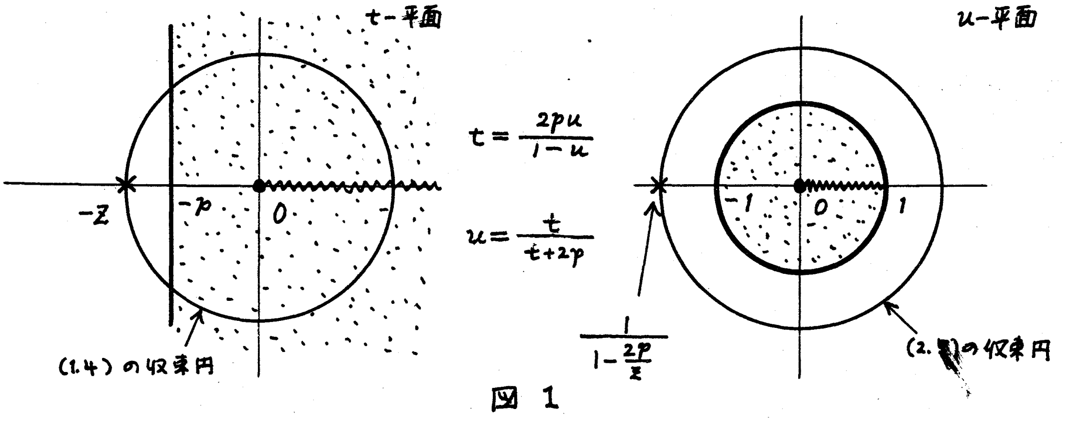


図1

$$F(z) = \int_0^\infty f(z;t)e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{t}{z}} e^{-t}dt \tag{2.2}$$

と置くと，変換 (2.1) によりこれは次の形に変わる．

$$F(z) = \int_0^1 f(z;\phi(u))\, e^{-\phi(u)} \phi'(u)\, du \tag{2.3}$$

ただし，

$$f(z;\phi(u)) = f\left(z;\frac{2pu}{1-u}\right) = \frac{1}{1+\frac{2pu}{z(1-u)}} = \frac{1-u}{1-\left(1-\frac{2p}{z}\right)u} \tag{2.4}$$

$$= 1 - \frac{2p}{z}u - \frac{2p}{z}\left(1-\frac{2p}{z}\right)u^2 - \frac{2p}{z}\left(1-\frac{2p}{z}\right)^2 u^3 - \cdots$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k, \tag{2.5}$$

$$c_k = \begin{cases} 1\ ;\ k=0 \\ -\frac{2p}{z}\left(1-\frac{2p}{z}\right)^{k-1};\ k \geq 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

である．級数 (2.5) の収束円は $|u| < \frac{1}{\left|1-\frac{2p}{z}\right|}$ であり，これは t-平面における $f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t}{z}}$ の特異点 $t=-z$ が，変換 $t = \frac{2pu}{1-u}$ により u-平面の $u = \frac{1}{1-\frac{2p}{z}}$ に写像されたことに対応している．そして，(2.3) の積分範囲は $(0, 1)$ であるが，p を $\mathrm{Re}\, z > p$ のように選んでおくかぎり，この積分範囲は完全に収束円 $|u| < \frac{1}{\left|1-\frac{2p}{z}\right|}$ の内部に入る．したがっ

て，(2.5)を(2.3)に代入して項別積分することが可能になる．

$$F(z) = c_0\int_0^1 e^{-\phi(u)}\phi'(u)\,du + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_0^1 u^k e^{-\phi(u)}\phi'(u)\,du$$

$$= c_0\int_0^{\infty} e^{-t}dt + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\infty}(\phi^{-1}(t))^k e^{-t}dt$$

$$= c_0 J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_k, \tag{2.7}$$

$$J_k = \int_0^{\infty}(\phi^{-1}(k))^k e^{-t}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{t}{t+2p}\right)^k e^{-t}dt \tag{2.8}$$

二重指数関数型公式[5]を利用すれば，積分 J_k は容易に要求される精度まで数値積分によって求めることができる．$\mathrm{Re}\,z > p$ であれば，特異点 $t=-z$ は u-平面の単位円の外部に写像される．したがって，以上から，$\mathrm{Re}\,z > p$ なる z に対する $E_1(z)$ が，実際に収束級数の形で数値計算できることがわかった．

以上の考え方は，広い範囲の特殊関数の計算に適用することができる．すなわち，与えられた特殊関数の定義の積分の範囲およびその被積分関数の特異点の位置に応じて適当な変換を選び，上記の操作を行えばよい．ここで述べた原理は要するに，高橋[3，4]によって提案された，変数変換を利用する解析接続の考えを，積分形で定義された特殊関数に応用

したものである．このように定義式から解析的操作によって直接導かれた表示には当然解析的性質のかなりの部分が保存されるので，この表示は，微分したり，あるいは他の解析的表示式に代入してさらに計算をすすめることもできる．その意味で，こうして得た解析的表示が，いわゆる最良近似式とは別の広い目的に十分役に立つことが期待できる．

§3．展開係数 c_n の求め方

上述の例では級数 (2.5) の展開係数 c_n は (2.4) の操作により簡単に求められたが，一般の場合には，$f(z;t)$ の t に変換式 $t=\phi(u)$ を代入してそれを u のべき級数に展開することはそう容易ではない．しかし，変換 $t=\phi(u)$ 自体が u のべき級数の形で与えられ，しかもその級数が u^1 の項から始まっている場合には，次の Lemma [2] の助けを借りることにより c_n を有限回の手間で簡単に求めることができる．つまり，そこでは変換 $t=\phi(u)$ において $t=0$ が $u=0$ に対応していることが本質的にきいている．

<u>Lemma</u>

$$t=\phi(u)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j u^j \tag{3.1}$$

とするとき

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k \tag{3.2}$$

において

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j W_{jk} \tag{3.3}$$

が成立する．ただし

$$\begin{cases} W_{1k} = b_k, \quad k=1,2,\cdots \\ \\ W_{jk} = \sum_{l=1}^{k-j+1} b_l W_{j-1,k-l}, \; j=2,3,\cdots,k\,;\; k=2,3,\cdots \end{cases} \tag{3.4}$$

証明は，W_{jk} が $(b_1 u + b_2 u^2 + \cdots)^j$ の展開における u^k の係数に等しいことに注意すれば容易である．

なお，後の §7 に述べるように，複素積分を利用することにより c_k が直接求められる場合もある．

§4．計算のアルゴリズム

一般に，$w(t)$ を積分の重みの関数として，目的の関数が

$$F(z) = \int_a^b f(z;t)\, w(t)\, dt \tag{4.1}$$

$$f(z;t) = a_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z) t^i \tag{4.2}$$

の形で定義されていて，変換の関数が

$$t=\phi(u)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j u^j, \qquad u=\phi^{-1}(t) \tag{4.3}$$

の級数の形で与えられているとしよう．このとき，$F(z)$ を

$$F(z)=c_0(z)J_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)J_k \tag{4.4}$$

の形で計算するためのアルゴリズムをここにまとめておこう．変換のパラメータ p は，あらかじめ適当な値に固定しておく．

(I) 係数の準備（定数として table に用意する）．

1. $k=0,1,2,\cdots$ に対して次の J_k を計算する．（二重指数関数型数値積分公式を利用する．）

$$J_k=\int_a^b (\phi^{-1}(t))^k w(t)\,dt$$

2. $k=0,1,2,\cdots$ に対して次の W_{jk} を計算する．

$$\begin{cases} W_{1k}=b_k \\ W_{jk}=\sum_{l=1}^{k-j+1} b_l W_{j-1,k-l}, \quad k=2,3,\cdots \end{cases}$$

(II) $F(z)$ の計算．

1. $$\begin{cases} c_0(z)=a_0(z) \\ c_k(z)=\sum_{j=1}^{k} a_j(z) W_{jk} \end{cases}$$

2. $$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) J_k$$

あらかじめ M を与え，$F(z)$ の項を $k=M$ で打ち切るときには

$$F(z) \doteqdot \sum_{k=0}^{M} c_k J_k = c_0 J_0 + \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j(z) W_{jk} \right) J_k$$

$$= a_0 J_0 + \sum_{j=1}^{M} V_j^{(M)} a_j(z), \tag{4.5}$$

$$V_j^{(M)} = \sum_{k=j}^{M} W_{jk} J_k \tag{4.6}$$

のように計算することも可能である．ただし，$V_j^{(M)}$ は M に大きく依存する．また，場合によっては $V_j^{(M)}$ の符号が正負交代し，著しい桁落ちを生ずることがあるので注意を要する．

後に挙げる具体例はすべて半無限区間の積分によって定義される特殊関数であるが，特殊関数によっては有限区間の積分で定義されるものもあり，そのとき通常は積分区間の少なくとも一方の端は被積分関数の特異点になっている．その場合でも，必要な J_k の数値積分には二重指数関数型公式が役に立つであろう．

§5．収束級数の形で計算可能な特殊関数の例

以下に，代表的な特殊関数について，定義式と，われわれの計算に必要な被積分関数の級数展開形を示しておく［1］．

(1) 積分指数関数 $E_1(z)$

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-z}}{z} \int_0^\infty f(z;t) e^{-t} dt$$

$$f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t}{z}} = 1 - \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} - \frac{t^3}{z^3} + \cdots$$

(2) 積分三角関数 $Si(z)$, $Ci(z)$

$$\begin{cases} Si(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - g_1(z) \cos z - g_2(z) \sin z \\ Ci(z) = \gamma + \log z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt = g_1(z) \sin z - g_2(z) \cos z \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(z) = z \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^2+z^2} dt = \frac{1}{z} \int_0^\infty f(z;t) e^{-t} dt \\ g_2(z) = \int_0^\infty \frac{t e^{-t}}{t^2+z^2} dt = \frac{1}{z^2} \int_0^\infty f(z;t)\, t e^{-t} dt \end{cases}$$

$$f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t^2}{z^2}} = 1 - \frac{t^2}{z^2} + \frac{t^4}{z^4} - \frac{t^6}{z^6} + \cdots$$

(3) Psi 関数 $\psi(z)$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \log z - \frac{1}{2z} - 2\int_0^\infty \frac{t}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)} dt \\ &= \log z - \frac{1}{2z} - \frac{2}{z^2} \int_0^\infty f(z;t) \frac{t}{e^{2\pi t}-1} dt \end{aligned}$$

$$f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t^2}{z^2}} = 1 - \frac{t^2}{z^2} + \frac{t^4}{z^4} - \frac{t^6}{z^6} + \cdots$$

(4)　$\log\Gamma(z)$

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{t}{z}}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$

$$= \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + 2\int_0^\infty f(z;t)\,\frac{1}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$

$$f(z;t) = \arctan\frac{t}{z} = \frac{t}{z} - \frac{t^3}{3z^3} + \frac{t^5}{5z^5} - \frac{t^7}{7z^7} + \cdots$$

(5)　誤差関数 $\operatorname{erf} z$

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2e^{-z^2}}{\pi z}\int_0^\infty f(z;t)\,e^{-t^2}dt$$

$$f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t^2}{z^2}}$$

(6)　不完全Γ関数 $\Gamma(a,z)$

$$\Gamma(a,z) = \int_z^\infty e^{-t}\,t^{a-1}dt = z^{a-1}e^{-z}\int_0^\infty f(z;t)\,e^{-t}dt$$

$$f(z;t) = \left(1+\frac{t}{z}\right)^{a-1} = \sum_{j=0}^\infty \frac{(a-1)(a-2)\cdots(a-j)}{j!}\left(\frac{t}{z}\right)^j$$

(7)　不完全Γ関数 $\Gamma(a,z)$ ―― Mellin の積分表示

$$\Gamma(a,z) = \frac{z^{a-1}e^{-z}}{\Gamma(1-a)}\int_0^\infty f(z;t)\,t^{-a}e^{-t}dt \quad (\mathrm{Re}\,a<1)$$

$$f(z;t) = \frac{1}{1+\frac{t}{z}}$$

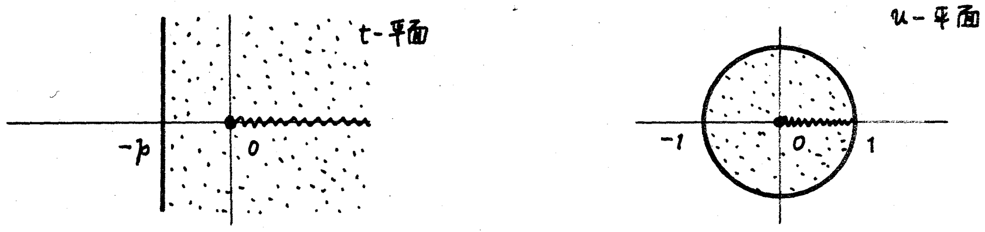
最後の表示は，aを固定し，zを変えて計算を行うとき有用であろう．

§6．変換関数 $t=\phi(u)$ の例

上に挙げた諸関数の計算に実際役に立つ変換をいくつか次に掲げる．∿∿∿は積分路を表し，点を打った領域は変換により互いに対応する部分領域を示す．

(A) $$t=\phi(u)=\frac{2pu}{1-u}=2p(1+u+u^2+u^3+\cdots)$$

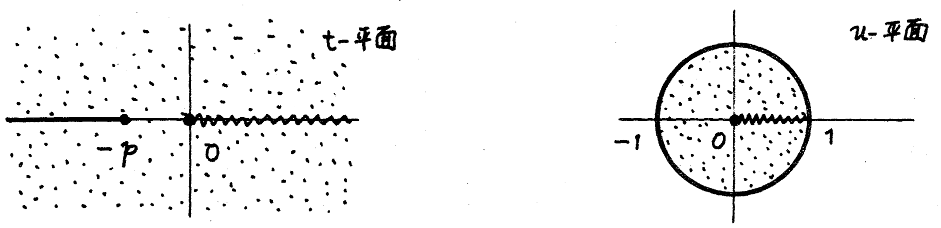
$$u=\phi^{-1}(t)=\frac{t}{t+2p}$$



この変換は，$\mathrm{Re}\,z>p$ に対する積分指数関数，不完全Γ関数などの計算に利用できる．

(B) $$t=\phi(u)=\frac{4pu}{(1-u)^2}=4p(u+2u^2+3u^3+\cdots)$$

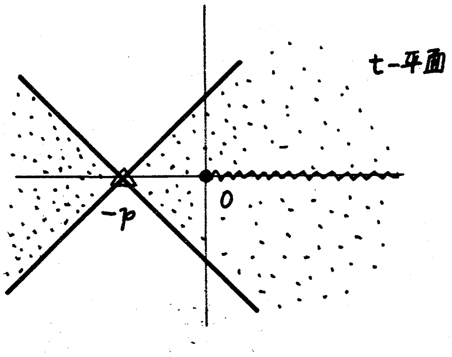
$$u=\phi^{-1}(t)=\frac{t}{t+2p+2\sqrt{p(t+p)}}$$

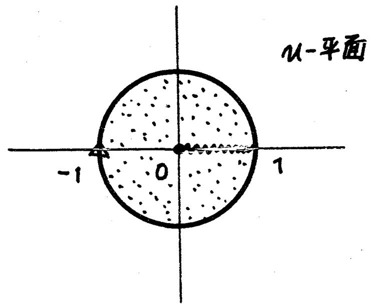


この変換は，$z>p$なる正の実数に特異点をもつ積分，すなわち実数z（$>p$）に対する積分指数関数あるいは不完全Γ関数などの計算に利用できる．

(C) $$t=\phi(u)=p\left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}-1\right)=p\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{8}u^4+\cdots\right)$$

$$u=\phi^{-1}(t)=\frac{t^2+2pt}{t^2+2pt+2p^2}$$





この変換は，$z=x+iy$とするとき$|y|>|x+p|$に特異点をもつ積分，すなわち例えば$z>p$なる実数zに対する積分三角関数，Psi関数，$\log\Gamma$，誤差関数の計算などに利用できる．また，(C) $t=\phi(u)$の展開の高次の項は，変換の合成を利用して，

$$t=p\left(\sqrt{1-\varsigma}-1\right)=-p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2j-3)!!}{j!\,2^j}\varsigma^j$$

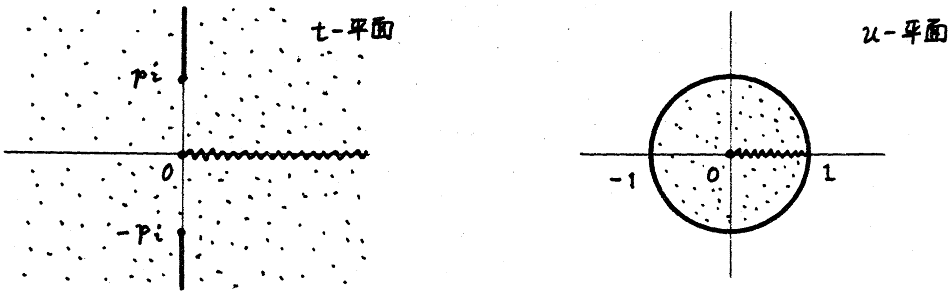
に，展開

$$\varsigma=1-\frac{1+u}{1-u}=\frac{-2u}{1-u}=-2\left(u+u^2+u^3+\cdots\right)$$

を代入し，§3 の Lemma を適用することにより求めることができる．

(D) $$t=\phi(u)=\frac{2pu}{1-u^2}=2p\,(u+u^3+u^5+u^7+\cdots)$$

$$u=\phi^{-1}(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}+p}$$

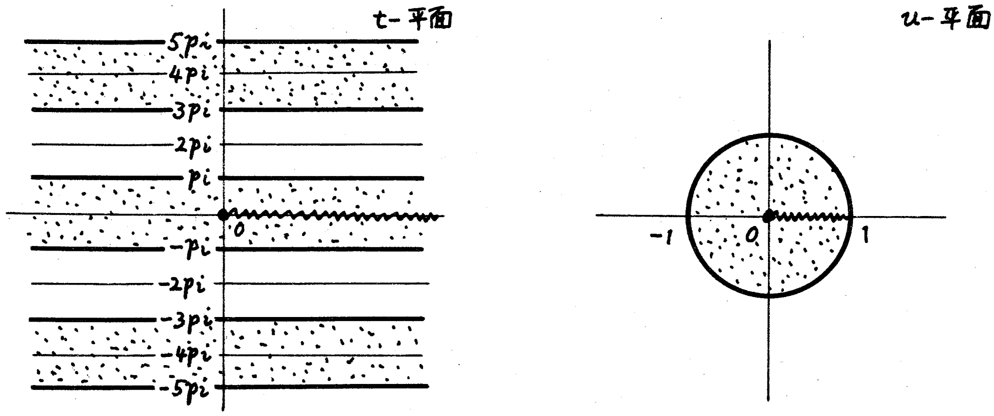


この変換は，$z>p$ なる実数 z に対する積分三角関数，Psi 関数，$\log\Gamma$，誤差関数などの計算に利用できる．

この他にも場合に応じて変換はいくらでも考えられる．例えば，実軸に平行な帯状領域内に特異点をもつような一連の積分を計算する場合には，次の変換が利用できよう．

(E) $$t=\phi(u)=\frac{2p}{\pi}\log\frac{1+u}{1-u}=\frac{4p}{\pi}\left(u+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+\cdots\right)$$

$$u=\phi^{-1}(t)=\tanh\frac{\pi}{4p}t$$



以上の変換のうち，(C)，(D)，(E) は，積分区間 $(-\infty, \infty)$ において定義された特殊関数の計算にも利用できることは明らかであろう．

§7．複素積分を利用する誤差解析

これまで，問題の積分区間が収束円の内部に入れば収束は自明であるとして議論してきたが，例えば (2.3) において積分の上端 $u=+1$ がちょうど収束円上に位置する場合，すなわち $z=p$ の場合には収束は別に証明しなければならない．このようなとき，収束の判定を行うことだけが目的であるならば，いわゆる Lebesgue の収束定理により，(2.5) を (2.2) に代入したとき，(2.7) へ導く項別積分が許されるか否かを判定すればよい．実際，上述の $z=p$ の場合にも (2.7) が収束することがこの定理から容易に判定できる．

しかし，実用的観点からは，級数を有限項で打ち切ったと

きの誤差項を複素積分によって表現し，その誤差表現を評価することにより，収束の証明と同時に，精密かつ実用的な誤差評価を導くことができる．

目的の積分を

$$F(z) = \int_a^b f(z;t)\,w(t)\,dt, \qquad t = \phi(u) \tag{7.1}$$

$$= \int_0^1 g(u)\,w(\phi(u))\,\phi'(u)\,du \tag{7.2}$$

と置く．ただし，

$$g(u) = f(z;\phi(u)) \tag{7.3}$$

である．よく知られているように，複素積分表示された誤差項をもつ $g(u)$ の Taylor 級数は次の形で与えられる．

$$g(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_n u^n + \varepsilon_n(u)\,u^{n+1} \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{1}{\zeta^{k+1}}\,g(\zeta)\,d\zeta & (7.5) \\[2ex] \varepsilon_n(u) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{1}{(\zeta-u)\,\zeta^{n+1}}\,g(\zeta)\,d\zeta & (7.6) \end{cases}$$

積分路Cは，$\zeta=0$ および $\zeta=u$ を内部に含み，$g(\zeta)$ の特異点を含まない正の向きの閉曲線である．(7.5) で与えられ

る c_k は，展開 (2.7) あるいは一般に展開 (4.4) の展開係数 c_k に他ならない．したがって，われわれの目的の展開係数 c_k はまた，複素積分表示 (7.5) からも計算できる場合もある．次に，留数定理により簡単に計算できる2例を挙げておく．

例 1．積分指数関数に，変換 (B) を適用．

$$E_1(z)=\frac{e^{-z}}{z}\left(1+c_1J_1+c_2J_2+\cdots\right)$$

$$c_k(z)=-\frac{4p}{kz}T_k'\left(1-\frac{2p}{z}\right),\quad J_k=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{t+2p+2\sqrt{p(t+p)}}\right)^k e^{-t}dt$$

ただし，T_k' は Chebyshev 多項式の微分である．

例 2．不完全 Γ 関数の Mellin 表示に，変換 (B) を適用．

$$\Gamma(a,z)=\frac{z^{a-1}e^{-z}}{\Gamma(1-a)}\left(J_0+c_1J_1+c_2J_2+\cdots\right)$$

$$c_k(z)=-\frac{4p}{z}\sum_{r=0}^{[(k-1)/2]}(-1)^r\binom{k-r-1}{r}\left\{2\left(1-\frac{2p}{z}\right)\right\}^{k-2r-1}$$

$$J_k=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{t+2p+2\sqrt{p(t+p)}}\right)^k t^{-a}e^{-t}dt$$

やゝ本論からそれたが，複素積分表示 (7.6) に基づく誤差評価に戻ろう．いま

$$F(z)=c_0J_0+c_1J_1+c_2J_2+\cdots+c_nJ_n+E_n(z) \tag{7.7}$$

と置くと，(7.2)，(7.4)，(7.6) より $E_n(z)$ は

$$E_n(z)=\int_0^1 \varepsilon_n(u)\,u^{n+1}\,w(\phi(u))\,\phi'(u)\,du \tag{7.8}$$

で与えられる．したがって，誤差 $E_n(z)$ を評価するには，複素積分 (7.6) を適当に評価して u の簡単な関数に帰着させ，それを (7.8) に代入すればよい．この評価法としては，場合によっていろいろなやり方が考えられるが，典型的な例として再び積分指数関数 $E_1(z)$ に変換 (A) を適用した場合を次に示しておこう．ここでは z は実数であるとしておく．

この場合の $g(\zeta)$ は，(2.4) より

$$g(\zeta)=f(z;\phi(\zeta))=\frac{\zeta-1}{\left(1-\frac{2p}{z}\right)\left(\zeta-\frac{1}{1-\frac{2p}{z}}\right)} \tag{7.9}$$

である．$z\neq 2p$ のとき，(7.9) は実軸上の点 $\zeta_0=1/\left(1-\frac{2p}{z}\right)$ に唯一の単純な極をもつ．(7.6) の積分路を十分大きくとれば，留数定理により

$$\varepsilon_n(u)=-\frac{2p}{z}\,\frac{1}{(\zeta_0-u)}\,\frac{1}{\zeta_0^{n-1}},\qquad \zeta_0=\frac{1}{1-\frac{2p}{z}} \tag{7.10}$$

となる．ここで，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{|\zeta_0-u|}<\dfrac{1}{|\zeta_0|}\ ;\ p<z<2p\\[2mm]\dfrac{1}{|\zeta_0-u|}<\dfrac{1}{\zeta_0-1}\ ;\ 2p<z\end{cases} \tag{7.11}$$

に注意すれば，(7.10)を(7.8)に代入することにより，結局次の誤差評価が導かれる．

$$|E_n(z)| < \begin{cases} \dfrac{2p}{z}\left(\dfrac{2p}{z}-1\right)^n J_{n+1} \ ; & p<z<2p \\ \left(1-\dfrac{2p}{z}\right)^n J_{n+1} \ ; & 2p<z \end{cases} \tag{7.12}$$

$z=2p$ のときには，(7.9)は

$$g(\zeta) = 1-\zeta, \quad z=2p \tag{7.13}$$

となり，$\varepsilon_n(u)=0$ である．したがって，$z=2p$ のときには(2.7)は正確な値を与えるが，これは展開(2.5)，(2.6)からも明らかである．

上記の評価では $z=p$ の場合が除外されているが，このときも $\zeta_0=-1$ となるだけで(7.12)の上側の不等式が成り立つ．

$$|E_n(z)| \leq 2J_{n+1}, \quad z=p \tag{7.14}$$

いまの例では(2.8)で与えられる積分 J_n について

$$\lim_{n\to\infty} J_n = 0$$

が成立することは容易に確かめられる．したがって，$p \leq z$ なる任意の実数 z に対して，展開(2.7)が収束することがわかる．

ここで扱った簡単な例以外の場合にも，一般に留数定理を利用するか，あるいは分岐線に沿った積分路に変形するなどして，誤差評価を得ることができよう．また，nが十分大のときには，複素積分(7.6)に鞍点法を適用することにより，誤差の近似的な見積りを行うことも可能であろう．

§8. 数値例

ここに，以上述べてきた方法を実際例に適用した結果を示しておこう。

例 1. $\log\Gamma(z)$に，$p=1$ととった変換(H)を適用する．この場合計算すべき級数は

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{t}{z}}{e^{2\pi t}-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z)\,J_k$$

であるが，任意のzに対してここではつねに

$$C_k(z)=0,\quad k=\text{偶数}$$

が成立するので，実際に計算する必要のある項数は$(k+1)/2$である．例えば$z=1.5$とすると，$k=9$（オ5項目）では$C_9J_9=3.5\times10^{-8}$，$k=15$（オ8項目）では$C_{15}J_{15}=-8.8\times10^{-10}$である．$k=15$までとった和は

$$\sum_{j=1,\,奇数}^{15} c_j J_j = 0.02740\ 70605$$

となる．この値を §5 (4) に代入して得た $\log \Gamma(1.5)$ の近似値は -0.1207822238 であり，ここまでの桁は真の値に一致する．

例2．積分指数関数に，$p=1$ ととった変換 (A) を適用する．これは先に挙げた例である．表1に J_k, $0 \le k \le 15$ の値を掲げておく．

表 1. $J_k = \int_0^\infty \left(\frac{t}{t+2p}\right)^k e^{-t} dt, \quad p=1$

k	J_k	k	J_k
0	$1.0000\ 00000 \times 10^{0}$	8	$3.0632\ 54340 \times 10^{-3}$
1	$2.7734\ 27662 \times 10^{-1}$	9	$1.9494\ 70151 \times 10^{-3}$
2	$1.0937\ 10649 \times 10^{-1}$	10	$1.2689\ 01551 \times 10^{-3}$
3	$5.0770\ 42846 \times 10^{-2}$	11	$8.4211\ 32621 \times 10^{-4}$
4	$2.6016\ 74433 \times 10^{-2}$	12	$5.6843\ 64749 \times 10^{-4}$
5	$1.4271\ 43237 \times 10^{-2}$	13	$3.8949\ 91002 \times 10^{-4}$
6	$8.2346\ 93348 \times 10^{-3}$	14	$2.7048\ 46640 \times 10^{-4}$
7	$4.9428\ 52114 \times 10^{-3}$	15	$1.9011\ 08941 \times 10^{-4}$

さて，$z=3$ における値を計算すると，$c_k J_k$ の値は $k=0$ の項を除いてすべて負で，例えば $c_{10} J_{10} = -4.3 \times 10^{-8}$，$c_{14} J_{14} = -1.1 \times 10^{-10}$ である．$k=14$ までとった和は

$$\sum_{j=0}^{14} c_j(3) J_j = 0.78625\ 12208$$

である．一方，(7.12)に基づく誤差評価により，上の値の誤差は

$$|E_{14}(3)| < \left(\frac{1}{3}\right)^n J_{n+1} = \frac{1}{3^{14}} \times J_{15} = 4.0 \times 10^{-11}$$

であることがわかる．また $z=1$ のときには，同じく $k=14$ の項まで和をとると

$$\sum_{j=0}^{14} c_j(1)\, J_j = 0.59657$$

が得られるが，このときは (7.14) の誤差評価より

$$|E_{14}(1)| \leq 2 J_{15} = 3.8 \times 10^{-4}$$

であり，上の値の精度が良くないことがわかる．

参考文献

[1] M. Abramowitz and A. Stegun, ed., Handbook of Mathematical Functions, NBS Appl. Math. Ser. No. 55 (1964).

[2] R. Estes and E. Lancaster, Some generalized power series inversions, SIAM J. Numer. Anal. 9 (1972) 241-247.

[3] 高橋，複素関数論と数値解析，京都大学数理解析研究所講究録 253 (1975) 24-37.

[4] 高橋・森，変数変換による Taylor 級数の収束の加速，京

都大学数理解析研究所講究録 172 (1973) 78-87.

[5] H. Takahasi and M. Mori, *Double exponential formulas for numerical integration*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 9 (1974) 721-741.

付記

研究集会終了後，高橋秀俊先生から，特殊関数 $F(z)$ の本来の変数 z に直接変数変換を行えば，より手っ取り早く，収束する級数が得られるというコメントを頂いた．先生の挙げられた例は，積分指数関数

$$E_1(z) = e^{-z}\int_0^\infty \frac{1}{t+z}e^{-t}dt$$

に変換

$$z = \phi(w) = p\frac{1+w}{1-w}, \quad w = \phi^{-1}(z) = \frac{z-p}{z+p}$$

をほどこす場合で，この操作により

$$E_1(z) = e^{-z}(1-w)\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+p)-(t-p)w}\, dt$$

$$= (1-w)\sum_{k=0}^{\infty} J_k w^k$$

$$J_k = \int_0^{\infty} \frac{(t-p)^k}{(t+p)^{k+1}} e^{-t} dt$$

の形の収束する級数が導かれる．先生はまた，この形の変換を行う場合には，得られた級数にさらに変数変換を行って収束領域を広げること［3, 4］がより簡単であることもコメントされた．

直接 z に変換を行うこの方法には，$\phi(0) \neq 0$ である点，また J_k 自体の収束が遅い可能性がある点などいくつかの問題もあるが，これについては十分検討の上，別の機会に発表したい．