数理解析研究所講究録
第 374 巻 1980 年 95-107

Some Remarks concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings.

都立大・理
渡辺敬一

k を体，$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ を k 上有限生成であるような，normal graded ring とする．R をある「幾何的」な情報で表し，その情報を用いて R の「環論的」な性質を記述するという事は種々の例を作る場合や，ある性質をもつ R をすべて分類する場合などに非常に有効である。実際，森重文氏は [M] に於て R が factorial になる場合を考え，代数閉体上の二次元 factorial graded domain をすべて分類した。また，Pinkham ([P]) は $\mathbb{C}$ 上の任意の2次元 graded normal domain が smooth curve X，X 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$，有限群 $G\subset \mathrm{Aut}(X)$ によって，$(\bigoplus_{n\geq 0} H^0(X,\mathcal{L}^n))^G$ という形に書ける事を示した。

最近の Demazure の仕事 [D] は任意の normal graded domain (k上の) が，ある normal projective variety X と X 上の「$\mathbb{Q}$－係数 Weil divisor」D を用いて記述できる事を示した (6頁参照)。また，この記述法は，R の環論的な性質を記述するのにも大変

便利である。 本稿の目的は，この記述法をRの divisor class group の計算，RがMacaulay環又はGorenstein環になる場合の決定，Rがrational singularityをもつための条件の考察などに応用する事である。

§1. $R(X,D)$ の定義と，divisor class group の計算.

本稿を通じて，次の記号を使う.

記号. ・kは体とする．(kは固定して考える)

- Xはk上の normal irreducible projective scheme とする．($\dim X \geqq 1$ とする).
- $k(X)$ を Xの有理函数体とする.
- $\mathrm{Irr}^1(X)$ をXの codim. 1 の irred closed subvarietyの集合とする。
- $\mathrm{Div}(X)$ をXの Weil divisor たちのなす群とする。($\mathrm{Irr}^1(X)$ 上の free Abelian group).
- $\mathrm{Div}(X,\mathbb{Q}) = \mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ （$\mathbb{Q}$係数Weil divisorの群）

$E=\sum r_V . V$， $E'=\sum r'_V . V$ のとき，$E \geqq E' \Leftrightarrow r_V \geqq r'_V$ ($\forall V \in \mathrm{Irr}^1(X)$)

$\lfloor E \rfloor = \sup\{Z \in \mathrm{Div}(X)\,;\, Z \leqq E\} = \sum [r_V].V$ （$[r_V]$ は r_Vの整数部分），

$\mathcal{O}_X(E) = \mathcal{O}_X(\lfloor E \rfloor)$ とおく．（const. sheaf $k(X)$の subsheaf

と考える).

以後，次の条件をみたす $D=\sum \frac{p_V}{q_V}\cdot V \in \mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})$ をfixする。($p_V, q_V \in \mathbb{Z}$, $q_V>0$, $(q_V, p_V)=1$ $\forall V \in \mathrm{Irr}^1(X)$).

(A) $\exists N>0$ (positive integer), ND は ample Cartier divisor.

D, p_V, q_V, N は断りなしに，以上の意味に用いる事にする。

$$R = R(X,D) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).T^n \subset k(X)[T] \quad (T:\text{不定元})$$
(条件(A)より，$\mathrm{Proj}(R) \cong X$ である.)
$$\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n>0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).T^n$$
$$C = C(X,D) = \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD).T^n)$$
$$C^+ = C^+(X,D) = \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_X(nD).T^n).$$

C^+ は X 上の "line bundle" の一般化だし，C は C^+ より，"0-section" $S^+ \cong X$ を除いた C の open subvariety である。

一般論により，canonical map，

$$\Phi : C^+ \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

が存在する。Φ は C と $\mathrm{Spec}(R)\setminus\{\mathfrak{m}\}$ との同型をひきおこし，S^+ を一点 $\{\mathfrak{m}\}$ に contract する。C, C^+ は X へ projection π, π^+ をもつ。π, π^+ による一点の fibre は reduced structure をとると，それぞれ $\mathbb{G}_m$, $\mathbb{A}^1$ と同型である。

$\mathrm{Spec}(R)$, C, C^+ は grading により引きおこされる $\mathbb{G}_m$-action をもち，Φ はその action と compatible である。

$V \in \mathrm{Irr}^1(X)$ に対し，$F_V = \pi^{-1}(V)_{\mathrm{red}} \in \mathrm{Irr}^1(C)$ とおく.

$Cl(R)$, $Cl(C)$などはR, Cの divisor class group を表わす。また, $HDiv(R)$で, Rの homogeneous divisor 全体, $HIrr^1(C)$で, $\mathbb{G}_m$-action により stable であるようなCの codim. 1の irred. closed subvariety 全体を表わす.

$P(R)$, $P(C)$ を R, Cの principal divisor たちのなす群とする。$Cl(R) = Div(R)/P(R)$, $Cl(C) = Div(C)/P(C)$ である。例により, HP は "homogeneous principal divisor" をあらわす。

$Cl(R)$を計算するに当って必要な事柄を列挙して行こう.

(1) $\dim R = \dim X + 1 \geq 2$, $C \cong \mathrm{Spec}(R) \setminus \{m\}$ だから, $Cl(R) \cong Cl(C)$ である。また, graded ring だから, $Cl(R) \cong HDiv(R)/HP(R)$ で与えられる ([S], Proposition 1.7).

(2) ([D], 2.6, 2.8参照) 対応 $V \rightsquigarrow F_V$ は $Irr^1(X)$と, $HIrr^1(C)$ との bijection を与える。また, πに対応する

$$\pi^* : Div(X) \longrightarrow Div(C)$$

は $\pi^*(V) = q_V \cdot F_V$ ($V \in Irr^1(X)$) で与えられる。特に,

$$\pi^*(D) = \sum p_V \cdot V \in Div(C).$$

$$Div(X, D) = \{ \sum r_V . V \in Div(X, \mathbb{Q}) \mid q_V \cdot r_V \in \mathbb{Z} \ (\forall V \in Irr^1(X)) \}$$

とおくと, π^* により, $Div(X, D) \xrightarrow{\sim} HDiv(C)$ である。

また, $Div(X, D) \xrightarrow{\sim} H.Div(R)$ (π^*と$(\Phi^*)^{-1}$ の合成) は,

$$E \longmapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(E + nD)) \cdot T^n$$ で与えられる。

(3) $Q(R)=k(C)=k(X)(T)$ （$Q(R)$ は R の商体）．また，$Q(R)$ の homogeneous element は $f.T^n$ （$f\in k(X)$, $n\in\mathbb{Z}$）の形に表わされる。従って，$HP(R)\cong P(X)+\mathbb{Z}.\mathrm{div}(T)$ である。

(4). （[DJ], 2.9） $\mathrm{div}(T)=\pi^*(D)=\sum p_V.V\in \mathrm{Div}(C)$.

以上の事柄をまとめると次の定理に到達する。

定理 1. $Cl(R)$ は次の exact sequence により与えられる。

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\theta}Cl(X)\longrightarrow Cl(R)\longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha)\to 0$$

但し，$\theta(1)=L.D$ （$L=\mathrm{LCM}\{q_V\,;\,V\in \mathrm{Irr}^1(X)\}$） また，$\alpha$ は $\alpha:\ \mathbb{Z}\longrightarrow\bigoplus_V\mathbb{Z}/q_V\mathbb{Z}$ ， $\alpha(1)=(p_V(\mathrm{mod}\,q_V))_V$ で与えられる。

系. R が factorial $\Leftrightarrow\begin{cases}Cl(X) \text{ は } LD \text{ で生成され，かつ } q_V \text{ た}\\ \text{ちは二つずつ互いに素である。}\end{cases}$

定理 1 の証明は次の exact sequence に snake lemma を適用すれば得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&P(X)&\longrightarrow&\mathrm{Div}(X)&\longrightarrow&Cl(X)&\longrightarrow&0\\ &&\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle\pi^*}&&\downarrow&&\\ 0&\longrightarrow&HP(C)\cong HP(R)&\to&H\mathrm{Div}(C)\cong \mathrm{Div}(X,D)&\to&Cl(C)\cong Cl(R)&\to&0.\end{array}$$

定理 1 は本質的に [M] にあらわれていると思われる。k が代数閉体のとき，$\dim R=2$ なる factorial graded domain を探すためには，$X=\mathbb{P}^1_k$, $D=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{q_i}P_i$ で，1°. q_i たちは二つずつ互いに素，2°. $(\prod_{i=1}^{n}q_i).(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{q_i})=1$ なるものを求めれば良

い。$n \geqq 2$ のとき，$R(X, D)$ が次数 $(\prod_{i=1}^{n} q_i)/q_i$ $(i=1, \cdots, n)$ の n 個の元で生成されているという事を確かめる事ができる。(勿論，得られる結果は [M] Th 5.1 と一致する。)

ここで，Demazure の基本定理を書いておこう．

定理 ([D], 3.5). $R = \bigoplus_{n \geqq 0} R_n$ が k 上有限生成な normal graded domain とする。$0 \neq T \in Q(R)$ を $\deg(T) = 1$ なる homogeneous element とするとき，$\exists_1$ $D \in \mathrm{Div}(X, \mathbb{Q})$ (但し，$X = \mathrm{Proj}(R)$)，$R_n = H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n$ $(\forall n \geqq 0)$.

§2. R の local cohomology group の計算．R が Macaulay 環，Gorenstein 環になるための条件．

環 R の depth，dualizing module などはすべて，R の $\mathfrak{m}$ に関する local cohomology によって決定される。従って，$H^q_{\mathfrak{m}}(R)$ $(q \geqq 0)$ を計算する。R は normal だから，$H^0_{\mathfrak{m}}(R) = H^1_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ である。また，$\dim R = \dim X + 1 = d$ とおく事にする。

命題 1. $H^q_{\mathfrak{m}}(R)$ は $q \geqq 2$ のとき graded R-module として $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{q-1}(X, \mathcal{O}_X(nD))$ と canonical に同型である。

（証明）［HR, §5］に於て，$H^q_{\mathfrak{m}}(R) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{q-1}(X, \widetilde{R(n)})$ が示されている。従って $\widetilde{R(n)} \cong \mathcal{O}_X(nD)$ on X を示せば良いが，これは条件（A）を使って $\widetilde{R(n)}$ の定義より出る。

系. $\operatorname{depth} R = q+1$，但し，$q = \min\{i>0 \mid H^i(X, \mathcal{O}_X(nD)) \neq 0,\ \exists n\in\mathbb{Z}\}$

系. R が Macaulay 環 $\Leftrightarrow$ $H^q(X, \mathcal{O}_X(nD))=0$, $0<{}^{\forall}q<d-1$, ${}^{\forall}n\in\mathbb{Z}$.

例. $X=\mathbb{P}^n$ のとき，$R(X,D)$ は任意の $D\in \operatorname{Div}(X,\mathbb{Q})$ に対して Macaulay ring である。一方，X が smooth rational ruled surface の場合，$D\in\operatorname{Div}(X)$ に対しては $R(X,D)$ は Macaulay 環だが，$D\in \operatorname{Div}(X,\mathbb{Q})$ に対しては $R(X,D)$ が Macaulay 環でないような例ができる。

次に，R の canonical module K_R（又は canonical class $cl(K_R)$）を計算しよう。R が Gorenstein 環 $\Leftrightarrow$ R は Macaulay 環かつ $cl(K_R)=0$ in $Cl(R)$ である。なお，$K_R = (H^d_{\mathfrak{m}}(R))^*$ で与えられる事を思い出そう。（注. 一般に graded R-module $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ に対し，$M^*=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^*_n$ 但し，$M^*_n = \operatorname{Hom}_k(M_{-n}, k)$. ［GW］,（1.2），（2.1.2）参照）.

定理 2. $K_R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X+D'+nD))$

但し，K_X は X の canonical divisor, $D' = \sum \frac{q_V-1}{q_V}\cdot V \in \operatorname{Div}(X,\mathbb{Q})$.

系. R が Macaulay 環 のとき，

R が Gorenstein 環 $\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}a=a(R)\in\mathbb{Z}$, $K_X+D'-aD\in P(X)$.

（定理２の証明）命題１と Serre duality により，

$(K_R)_n = (H^d_m(R)_{-n})^* \cong H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(-nD))^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-nD), \mathcal{O}_X(K_X))$

$\cong H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - \lfloor -nD \rfloor))$. $-\lfloor -nD \rfloor = \lfloor nD + D' \rfloor$ に注意すると，

$(K_R)_n = H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$ を得る。この同型は R の homogeneous element による乗法と compatible である事より定理２を得る。系はこの事と $Cl(R)$ の考察によりすぐ得られる。

（注）[GW]（3.1.4）に於て，R の不変量 $a(R)$ を

$$a(R) = -\min\{m \mid (K_R)_m \neq 0\} = \max\{m \mid H^d_m(R)_m \neq 0\}$$

として定義したが，$K_X + D' = aD + \mathrm{div}_X(f)$ （$\exists f \in k(X)$）となるとき，この a は上の $a(R)$ と一致する．

（注）R が Macaulay 環のとき，$R^{(N)}$ も Macaulay 環である事から $X = \mathrm{Proj}(R)$ も Macaulay scheme である事はすぐわかるが，R が Gorenstein 環であっても X は Gorenstein scheme とは限らない。例えば $R = k[U, V, W]$，$\deg U = 1 = \deg V$，$\dim W = n \geqq 2$ とおくとき，X は特異点を一つもち，$n \geqq 3$ のときその特異点は Gorenstein でない。

§3. Rational singularity であるための判定法.

この§では $ch(k) = 0$ とする．

一般に variety Y が rational singularity しかもたない
$\Leftrightarrow$ $\exists$ resolution $\pi: \tilde{Y} \to Y$, $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})=0$ $(\forall q>0)$, $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}=\mathcal{O}_Y$.
Spec(R) が rational singularity しかもたぬとき，単に "Rは rational singularity" という。便宜上 regular ring も rational singularity のうちに含めてある。"Rは rational sing" より，"Rは normal かつ Macaulay 環" が得られる．([T], I, §3).

2次元の rational singularity はかなり研究されているが，dimension が3以上の rational singularity の例は次のものしか見つかってないように思われる。

1°. complete intersection で isolated singularity をもつもの。特に，weighted homogeneous の場合は weight のみにより rational singularity であるかどうかを判定できる．([B], [W], [V]).

2°. 多項式環又は regular ring の有限群又は reductive 代数群による不変部分環．更に一般には次が知られている。

<u>定理</u>（Boutot） RをSの部分環，（Sはk上有限生成）RはR加群としてSの直和因子とする。このとき，もしSが rational singularity $\Rightarrow$ Rも so.

（この定理がどこに書いてあるかは知らない。ただ，近く出るであろう Hochsterの Lecture Note の中には含まれると思う。）

3°. Xが smooth projective variety，$\mathcal{L}$がX上の ample

invertible sheaf, $R = R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ のとき，
Rが rational singularity $\Leftrightarrow H^q(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0 \quad \forall q > 0, \forall n \geq 0$.

この証明は，$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ と書くとき，§1の notation で，
$\Phi : C^+(X, D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ が $\mathrm{Spec}(R)$ の resolution である事よりあきらかである。これから述べるのはこの事実の若干の一般化だが，要するに；$C^+(X, D)$ が rational singularity しか持たなければ同じ事であるところに尽きる．これを定式化すると次のようになる。

<u>定理</u> 3. Xを smooth projective variety，$D \in \mathrm{Div}(X, \mathbb{Q})$，$D - \lfloor D \rfloor$ が normal crossing しかもたないとする．このとき $R(X, D)$ が rational singularity $\Leftrightarrow H^q(X, \mathcal{O}_X(nD)) = 0 \; (\forall q > 0, \forall n \geq 0)$.

但し $D - \lfloor D \rfloor = \sum \frac{p_V}{q_V} \cdot V$ が $P \in X$ で normal crossing とは，$\mathrm{Supp}(D - \lfloor D \rfloor) \supset V_1, \cdots, V_s$ が P を通るとき，P の regular param system $(x_1, \cdots, x_d)$ を $V_i = \{x_i = 0\}$ と P の近くでとれる事である。Xの各点で normal crossing のとき単に "normal crossing" という。

(注) 定理3の仮定は次のように弱める事ができる。
「Xは高々 rational singularity しかもたず，Xの特異点の近傍ではDは (integral) Cartier divisor，かつ $D - \lfloor D \rfloor$ は normal crossing」．

系. 定理3の仮定の下に, $R(X,D)$ が rational singularity $\Leftrightarrow$ R が Macaulay 環かつ $a(R)<0$.

(定理3の証明) $\theta: Y \to C^+ = C^+(X,D)$ を C^+ の resolution とする。$\pi = \Phi\circ\theta: Y \to \mathrm{Spec}(R)$ は $\mathrm{Spec}(R)$ の resolution である。定理3の仮定の下で, C^+ が toroidal singularity (単項式たちで生成されるような normal singularity) しかもたない事がすぐわかる。toroidal singularity は rational singularity だから ([T], I. §3), $R^q\theta_*(\mathcal{O}_Y)=0$ $(\forall q>0)$. ゆえに, $R^q\pi_*(\mathcal{O}_Y) \cong R^q\Phi_*(\mathcal{O}_{C^+}) \cong H^q(C^+, \mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} H^q(X, \mathcal{O}_X(nD))$. Q.E.D.

例1. $\dim X = 1$ のとき, 定理3の仮定は常にみたされているから, $R(X,D)$ が rational singularity $\Leftrightarrow$ $a(R)<0$.

例2. $X = \mathbb{P}^{d-1}$, H_i $(i=1,\dots,s)$ が一般の位置にある超平面とするとき, D が H_i たちの (有理係数) 一次結合なら定理3の仮定が成立し, $R(X,D)$ が rational singularity $\Leftrightarrow$ $\forall n\geq 0, \deg(\lfloor nD \rfloor) \geq -d+1$. 例えば, p, q を互いに素な正整数, $ap+bq=1$, H, $H_1,\dots,H_q$ を一般の位置にある超平面, $D = aH + \sum_{i=1}^{q} \frac{b}{p}\cdot H_i$ とおくと, $R = R(X,D) \cong k[S, T_1,\dots,T_d]/(S^p - \prod_{i=1}^{q} l_i(T_1,\dots,T_d))$. ($T_1,\dots,T_d$ は $\mathbb{P}^{d-1}$ の同次座標, l_i は H_i の方程式). このとき, $a(R) = pq - dp - q$ で, R が rational singularity $\Leftrightarrow$ $pq - dp - q < 0$.

<u>例3</u>. (X_1, D_1) と (X_2, D_2) が定理3の条件をみたすとき，$(X, D) = (X_1 \times X_2,\ p_1^*(D_1) + p_2^*(D_2))$ もやはり定理3の条件をみたす．$R(X, D) = R(X_1, D_1) \# R(X_2, D_2)$ (Segre Product, [GW] Chap.4参照) である事はすぐわかる。例えば，
$R_1 = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ $(\deg x = 21,\ \deg y = 14,\ \deg z = 6)$,
R_2 を rational double point (例えば $k[x, y, z]/(xy - z^n)$).
とするとき，R_1 は rational singularity でないが，$R_1 \# R_2$ は rational singularity となる。

(注) X が smooth であっても，V が悪い singularity をもち，q_V も大きいとき，$D = \sum \frac{p_V}{q_V} V$ とおいて，$C^+(X, D)$ は rational singularity でない singularity をもつ。しかし，勿論 "$D - \lfloor D \rfloor$ は normal crossing" という条件は，$C^+(X, D)$ が rational singularity をもつための必要条件ではない．

(注) ある graded ring の各 homogeneous element に対する degree の与え方は unique でない (例えば $R = R'[X]$ という形のとき X の degree は自由に指定できる。) しかし，R が孤立特異点の時は degree の与え方はかなり制限されるように思える。例えば次のような事は成立しないだろうか？

<u>問題</u>. R が孤立特異点をもつ Macaulay graded ring のとき，
R が rational singularity $\Longleftrightarrow$ $a(R) < 0$ (?)

REFERENCES.

[B] Burns,D.: On rational singularities in dimensions > 2. Math. Ann. 211, 237-244 (1978).

[D] Demazure,M.: Anneaux gradues normaux, C.N.R.S. 169, Mai 1979.

[GW] Goto,S. and Watanabe,K.: On graded rings,I. J.Math.Soc.Japan, 30,179-213 (1978).

[HR] Hochster,M. and Roberts,J.L.: Rings of Invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Adv. in Math. 13,115-175 (1974).

[M] Mori,S.: Graded factorial domains, Japan.J.Math. 3,223-238, (1977).

[P] Pinkham,H.: Normal surface singularities with C*-action. Math.Ann. 227, 183-193 (1977).

[S] Samuel,P.: Lectures on Unique Factorization Domains. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1964.

[T] Kempf,G., Knudsen,F., Mumford,D. and Saint-Donat,B.: Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer 1973.

[V] Viehweg,E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. Proc. A.M.S., 63,6-8, (1977).

[W] Watanabe, Kimio: On plurigenera of normal isolated singularities,I. (in preprint).