数理解析研究所講究録
第 374 巻 1980 年 187-194

Excellent ringをめぐって

名大 理　　松村英之

Excellent ringについて, 去年から今年にかけて, 主に Christel Rotthaus (Münster 大学) の努力によっていくらかの進歩がなされた。以下は彼女の業績を中心に述べる。

考える環はすべてネータ環とする。$\mathfrak{p}$が環Aの素イデアルならば、$\kappa(\mathfrak{p})$で$A/\mathfrak{p}$の商体$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$を表わす。環の射$f: A \to B$が

①平坦で, かつ

②すべてのファイバー$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$) が$\kappa(\mathfrak{p})$代数として geometrically regular (resp. geom. normal, geom. reduced)

であるとき、fを正則射 (resp. 正規射, 被約射) という。

Aが局所環で$A \to \hat{A}$が正則射 (正規射, 被約射) であると

き，AをG環（Z環，N環）と呼ぶ。局所環でないときには，Aのすべての局所環がG環であるときAをG環と呼ぶ。Z環，N環についても同様である。

環AがJ-2であるとは，すべてのfinite A-algebra Bに対し，$\mathrm{Reg}(B)=\{P\in \mathrm{Spec}(B)\mid B_P$ が正則局所環$\}$が $\mathrm{Spec}(B)$ の開集合であることとする。G環かつJ-2であるようなネータ環は<u>quasi-excellent</u>（以下q.ex.と略す）であるといわれる。q.ex.環がuniversally catenaryであるとき，<u>excellent ring</u>と呼ばれる。

ネータ環Aが条件

(PG) 任意の $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)$ と，$\kappa(\mathfrak{p})$ の任意の有限次拡大体Lとに対し，$A/\mathfrak{p}$ のLでの整閉包は有限生成 $A/\mathfrak{p}$ 加群である。

をみたすとき，Nagata環（あるいはpseudo-geometric ring又はuniversally Japanese ring）と呼ばれる。条件(PG)はまた

(UJ) ① AはN環である。
② どんなfinite A-algebra Bに対しても，$\mathrm{Nor}(B)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,B\mid B_{\mathfrak{p}}$ はnormal$\}$ は $\mathrm{Spec}\,B$ の開集合である。

と同値である。(EGA IV (6.13.4), (7.6.4), (7.7.2)) 従って q.ex. ring と Nagata ring の定義は大変良く似ている。

I. q.ex. と Nagata はどれほど違うか.

(a) q.ex. ⇒ Nagata は良く知られている。([LCA] p.257 Th.78)

(b) dim 1 のときは逆も成り立つ.

(c) 標数 0 の 2 次元正則局所環が Nagata なら q.ex. である.

(d) 反例, $\mathbb{Q}$ を含む 3 次元正則局所環 A, および A/uA の形の 2 次元正規局所環 $\bar{A}$ で, Nagata ではあるが q.ex. でないものがある。(Rotthaus [1])

(e) 標数 0 の 2 次元局所環が Nagata なら J-2 である。

(f) 反例. $\mathbb{Q}$ を含む 3 次元局所整域 A で, Nagata だが Reg (A) が開集合でないものが存在する。(Rotthaus [2])

(b), (c), (e) は定義から容易に出る. Rotthaus [1] は 20 頁に及び, 可換環論で知られている最も複雑な反例ではあるまいか。[2] は [1] と同種の技巧ではあるがもっとすっきりしている。

II. Lifting の問題。

$\mathbb{P}$ を環についての或る性質で, A について成り立てば A の

任意の準同型像についても成り立つようなものとする。Grothendieckは一般に次のような問題を考えることの重要性を指摘した。

Aを環，Iをイデアルとし，AはI進位相で完備でA/Iが性質$\mathbb{P}$をもつとする。このときAも$\mathbb{P}$をもつか？

これは大変良い問題で，その後のネータ環論に色々の発展をもたらす契機となった。これを（性質$\mathbb{P}$の）liftingの問題と呼ぶことにする。上の仮定をみたすAの任意の準同型像$\bar{A}$は，（イデアルIの像$\bar{I}$に関して）同様の仮定をみたすから，帰納法にのり易いformulationになっていることに注意されたい。

(a) $\mathbb{P}$ = Nagata の時，liftingの問題は肯定的にとかれた。（Marot [1]）これはネータ整域の整閉包に関する森誉四郎の深い結果を用いることを除けばそれほどむつかしくなかった。

(b) $\mathbb{P}$ = q. ex. のとき，liftingの問題は一般には未解決であるが，今年Rotthausが次の定理を証明した。

<u>定理</u>　AがI進完備なsemi-local ringで，A/IがG環ならば，AもG環である。

注．semi-local ringについては，q. ex. とG環とは同じこ

とである。なお，西村純一君は，上の定理でG環の代りにZ環，またはN環としても成り立つことをたしかめた。

証明のスケッチ．AをI進位相で完備な半局所環でA/IがG環であるものとする。dim Aに関するinductionを用いる。Aは整域であるとしてよい。Aの（radicalによる）完備化を$\hat{A}$とする。$\mathrm{Sing}(\hat{A})$は$\mathrm{Spec}(\hat{A})$の閉集合であるから，

$$S = \bigcap_{P \in \mathrm{Sing}\hat{A}} P$$

とおくと$\mathrm{Sing}(\hat{A})$はSによって定義される：$\mathrm{Sing}(\hat{A}) = V(S)$．$S \cap A = \mathfrak{a}$とおくとき，$\mathfrak{a} \neq (0)$を示せばよい（[CA] p.252）。これを彼女は次のような独創的Lemmaによって示す。

<u>Lemma</u>. $S_n = S + I^n\hat{A}$, $S_n \cap A = \mathfrak{a}_n$とおく．
もし　$\mathfrak{a}_n\hat{A} = S_n$　($\forall n$)が成り立てば$\mathfrak{a} \neq (0)$である。

証明はやさしい。定義から$S \neq (0)$であり従って$\mathfrak{a}_r \not\subset I^r$となる$r$が存在すること，$\mathfrak{a}_m + I^n = \mathfrak{a}_m$ $(m > n)$が成り立つことに注意して，$a_r, a_{r+1}, \cdots$を

$$a_r \in \mathfrak{a}_r,\ a_r \notin I^r,\ a_n \in \mathfrak{a}_n,\ a_n \equiv a_{n+1}\ (I^n)$$

をみたすように取れば，$\lim_{n\to\infty} a_n$はI^rに入らず$\bigcap_n \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$に入る。　Q.E.D.

したがって，定理を証明するには

$$(*) \qquad \mathfrak{a}_n \hat{A} = \mathfrak{b}_n \quad (\forall n)$$

を示せばよい。この両辺は $I^n\hat{A}$ を含んでいるから，そうでないイデヤルよりも調べ易いことは明らかである．

ここから先は，適当な局所化と完備化を行い帰納法の仮定を適用するのであって，詳しくは Rotthaus [3] および西村[1] を見られたい。ただ注意すべきは，その際に M. André [1] が証明した次の重要な定理が効果的に用いられていることである。

Th. $f: A \to B$ を局所環の局所準同型で，A が G 環であるとする。このとき，f が formally smooth ならば正則である。

[f が formally smooth というのは，平坦で，閉ファイバーが geometrically regular ということと同値であり，f が正則であるというのは，平坦で，すべてのファイバーが geom. regular であるということである。]

一方，西村[1] は次のやや思いがけない事実を示した：lifting の問題は G 環という性質に対しては否定的である。

彼の反例は標数 2 の 2 次元 G 環で，そのイデアル I による

I進完備化がN環でないものである。

最近西村氏の所へH. Seydiから、
"AがQを含むexcellent ring，IがAのイデアルなら，AのI進完備化もexcellentである。"
が証明できたと知らせてきた由である。証明は未着であるから真疑未確認の情報ではあるが，何やら大結が近づいてきたような感じがする。

文　献

M. André [1]. Localisation de la lissité formelle. Manuscripta math. 13 (1974), 297-307.

J. Marot [1]. Sur les anneaux universellement japonais. Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 103-111.

H. Matsumura [CA]. Commutative Algebra. Benjamin, 1970.

C. Rotthaus [1]. Nicht ausgezeichnete, universell japanische Ringe. Math. Z. 152 (1977), 107-125.

——— [2]. Universell japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort. Nagoya Math. J. 74 (1979), 123-135.

——— [3]. Komplettierung semilokaler quasiausgezeichneter Ringe. ibid. 76 (1979), 173-180.

西村純一 [1]. On ideal-adic completion of noetherian rings. 近刊