数理解析研究所講究録
第 375 巻 1980 年 112-128

広田の方法, 逆散乱法, Bäcklund変換の間の関係について

早大 理工 大石進一

§1. はじめに

ソリトン理論の進歩によって、ソリトン現象を記述する完全積分可能な非線形発展方程式を解析する為の手法が幾つか発見され発展させられて来ている。逆散乱法,[1] Bäcklund変換,[2] 広田の方法[3,4,5,6] などはそのような手法の代表的な例である。ここでは、広田の方法を中心にして, これらの解析法の間の関係について, 二三の側面から論じることにしたい。

§2. 双線形微分ー差分方程式

広田の方法は、非線形発展方程式を分数形の従属変数変換によって或る種の双線形微分ー差分方程式に直して解析する手法であるが, 非線形方程式が双線形形に書き直せても、それだけでは必ずしも広田の方法によって解が得られる訳ではない。小文では、そのような双線形微分ー差分方程式の内、

従属変数を1つ含むものの一般形を例にとって、この方程式が各種の厳密解をもつ為の条件を明らかにし、その結果を用いて逆散乱法やBäcklund変換と広田の方法の間の関係について考察することにしたい。

広田の方法によって取り扱われるソリトン方程式は従属変数変換の種類によって色々な双線形方程式に変換されるが、従属変数を1つ含む双線形方程式の一般形は次のように書かれる：

$$A f\cdot f = 0 \qquad (2.1)$$

但し、fは独立変数t, x, y … の関数で、Aは

$$\begin{aligned} A f\cdot g &\equiv A(D_t, D_x, D_y, \cdots) f(t,x,y,\cdots) \\ &\quad \cdot g(t,x,y,\cdots) \\ &\triangleq A\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y'}, \cdots\right) \\ &\quad \times f(t,x,y,\cdots) g(t',x',y',\cdots)\Big|_{t'=t,\, x'=x,\, y'=y \cdots} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

によって定義されるいわゆる広田の双線形作用素[3]とする。ここに、$A(\tau,\xi,\eta,\cdots)$は変数$\tau,\xi,\eta\cdots$の実解析関数で

$$A(\tau,\xi,\eta,\cdots) = \sum_{0\leq\varepsilon,\delta,\gamma\cdots} c_{\varepsilon\delta\gamma\cdots}\, \tau^{\varepsilon}\xi^{\delta}\eta^{\gamma}\cdots \qquad (2.3)$$

のように定義されるものとする。但し、$c_{\varepsilon\delta\gamma\cdots}$ は定数とする。式(2.1)のように変換されるソリトン方程式には次のようなものがある：

［例1］ Korteweg-de Vries (KdV) 方程式：[3)]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = 2(\log f)_{xx},$$

$$D_x(D_t + D_x^3)f\cdot f = 0$$

［例2］ Kadomtsev-Petviashvili (K-P) 方程式：[3)]

$$u_{tx} + 3(u^2)_{xx} + u_{xxxx} \pm u_{yy} = 0, \quad u = 2(\log f)_{xx},$$

$$(D_t D_x + D_x^4 \pm D_y^2)f\cdot f = 0$$

［例3］ 戸田方程式：[3)]

$$\{\log[1 + u(x)]\}_{tt} = u(x+1) + u(x-1) - 2u(x),$$

$$u = (\log f)_{tt}, \quad \{D_t^2 - [2\sinh(D_x/2)]^2\}f\cdot f = 0$$

但し、以上の例において，$\partial u/\partial t = u_t$，$\partial u/\partial x = u_x \cdots$ 等の略記法を用いた。以上の方程式以外にも多くの代表的なソリトン方程式が式(2.1)の形に変換される。それらについては、文献3及び4を参照されたい。

§3. 一般化ソリトン解

式(2.2)で定義される作用素Aは変数f及びgについてそれぞれ線形、すなわち双線形である。小文では、まず、作用素Aの双線形性を利用して式(2.1)の解を構成することを検

討する。以下、一般性を失うことなく、作用素Aは次の2つの条件

$$(C\cdot 1)\quad Af\cdot g = Ag\cdot f$$

$$(C\cdot 2)\quad A1\cdot 1 = 0$$

を満たしているものとする。また、簡単の為、関数 f は t, x, y のみの関数と仮定する。

作用素Aの双線形性を利用して式(2.1)の解を構成するには、形式的に

$$f(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t,x,y),\ (f_0 = 1), \qquad (3.1)$$

と置くと便利である。すなわち、式(3.1)を式(2.1)に代入すると、関数 f_n が方程式系

$$2Af_n\cdot 1 = -\sum_{\alpha=1}^{n-1} Af_{n-\alpha}\cdot f_\alpha\ ,\ (n=0,1,2,\cdots),\ (3.2\text{-}n)$$

を満足すれば、式(3.1)で定義される関数 f は式(2.1)を形式的に満足することがわかるが、式(3.2−n)は関数 $\{f_\alpha\}_{\alpha=0}^{n-1}$ が既知のときには、関数 f_n に対する線形方程式となる。従って、関数 f_n を式(3.2)を用いて n の小さい方から順次決定してゆけば、式(2.1)の解を原理的には線形技法のみで構成できることがわかる。以下、このようにして式(2.1)の解を構成することを考える。

まず、式（3.2－1）は

$$A f_1 \cdot 1 = 0 \qquad (3.3)$$

となり、関数f_1に対する斉次線形方程式となる。但し、$f_0 = 1$と置いたが、これは条件（C.2）から式（3.2－0）を満たしている。式（3.3）の特解としては

$$f_1 = \exp \phi \qquad (3.4)$$

がある。但し、$\phi \equiv \phi(k, l) \triangleq \omega(k, l) t + kx + ly$は位相関数で、定数$\omega, k, l$は分散関係式

$$A(\phi) \triangleq [A \exp(\phi) \cdot 1] \exp(-\phi) = 0 \qquad (3.5)$$

を満たすものとする。従来、式（3.3）の解として

$$f_1 = \sum_{\alpha=1}^{N} \exp(\phi_\alpha) \quad , \quad \phi_\alpha \triangleq \phi(k_\alpha, l_\alpha) \qquad (3.6)$$

と選んだ場合が調べられていたが、[3] ここでは、式（3.3）の一般解

$$f_1 = \int \exp[\phi(k, l)] \, d\tau(k) \, d\mu(l)$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k, l) \exp[\phi(ik, il)] \, dk \, dl$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \exp \phi(k_{0\alpha}, l_{0\alpha}) \, , \quad (C_\alpha : \text{定数}) \qquad (3.7)$$

を選んだ場合について考える。但し、$d\tau(k)$及び$d\mu(l)$は

それぞれ複素 k－および l－平面の測度で式(3.7)によって定義されるものとする。また、$\rho(k,l)$ は k と l の適当な関数、$\mathrm{Re}\,k_{0\alpha}<0$, $\mathrm{Re}\,l_{0\alpha}<0$ とする。式(3.7)の最右辺において第1項はさざ波に、第2項がソリトンに対応している。

筆者は、関数 f_1 を式(3.7)のように選んだとき、関数 f_n $(n=2,3,\cdots)$ が方程式系(3.2－n)から決定される条件を調べて次の結果を得た。[4)]

<u>定理1</u>　作用素Aが条件(C・1,2)に加えて条件

$$D_n \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} A\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_\alpha \phi_\alpha\right) \prod_{1\leq\alpha<\beta\leq n} A(\sigma_\alpha\phi_\alpha-\sigma_\beta\phi_\beta)\,\sigma_\alpha\sigma_\beta=0 \tag{3.8-n}$$

を $n=1,2,\cdots$ について満たせば、関数 f_n, $n\geq 2$, は次のように求められる：

$$f_n=\frac{1}{n!}\int \prod_{1\leq\alpha<\beta\leq n}\left[-\frac{A(\phi_\alpha-\phi_\beta)}{A(\phi_\alpha+\phi_\beta)}\right]\cdot \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\phi_\alpha\right)\prod_{\alpha=1}^{n} d\tau(k_\alpha)\,d\mu(l_\alpha) \tag{3.9-n}$$

但し、式(3.8－n)において $\sum_{\sigma=\pm 1}$ は、要素として $\sigma_\alpha=1$ or -1 をもつベクトル $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 全てについての和を表わすものとする。式(3.1),(3.7),(3.9－n)で定義される解を一般化ソリトン解と呼ぶ。■

この結果の証明は文献4に示されているので、それを参照

されたい。ここで、2つ注意する。1つは、定理1の条件は式(3.6)から出発して得られる通常のN-ソリトン解が存在する為の条件[7,4]と同等になることである。従って、定理1は次のようにも言い換えられる：

定理1′　方程式(2.1)が通常のN-ソリトン解[7,4]をもてば、式(2.1)は一般化ソリトン解をもつ。■

さて、特に条件(3.8-n)は$n \leqq 2$のときには自明なので次の系を得る：

系　式(2.1)は、条件(C.1,2)の下で常に1及び2-ソリトン解[7,4]をもつ。■

もう1つの注意は、関数f_n, $n \geqq 2$,は関数f_1が与えられれば一意的に決定されることである。従って、関数f_1を例えば初期値$f(t=0,x,y)$から決定できれば、ソリトン方程式の初期値問題の一般解が一般化ソリトン解として与えられることになる。関数f_1(または、$f_1(t=0,x,y)$でも充分)を関数$f(t=0,x,y)$から決定できるか否かという問題は、個々の方程式によっても異なり、一般には難しいが、通常のN-ソリトン解が行列式で書ける場合には、一般化ソリトン解fをFredholm行列式の形に書き直すことができ、このことを利用すれば可能である。これらのことについては、KdV方程式及びK-P方程式について議論されている文献8がまもな

く出版されるので、それを参照して下さい。文献8では、一般化ソリトン解が逆散乱法を用いて構成された初期値問題の一般解と同等であることが示されている。

§4. Wronskian形のN－ソリトン解

前節の議論から、系の完全積分可能性と特殊解であるN－ソリトン解の構造とが密接に関連していることがわかった。本節では、N－ソリトン解のもつ、もう一つの構造について調べてみる。

前節に示したように、広田の方法あるいは逆散乱法を用いて得られるN－ソリトン解は、退化したFredholm行列式の形をしている。これに対して、Bäcklund 変換を通して構成されるN－ソリトン解は、また別の関数形をもっている[9]。また、最近では、伊達[10]は非線形方程式の逆散乱形式を用いて直接にWronskian形をしたN－ソリトン解を構成する方法を示した。

本節及び次節では、式(2.1)が定理1の条件の下で、特別な方程式についてはWronskian形のN－ソリトン解と同等となる解の族をもつことを示して、広田の方法とBäcklund変換，伊達の方法との間の関係について論じることにする。

まず、結果を示す：

定理２．　式(2.1)において、作用素Aが条件(C.1,2)に加えて条件

$$D_n(U) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1}^{(U)} A\left(\sum_{\alpha=0}^{N} 2\sigma_\alpha \phi_\alpha\right) \prod_{1\leqq\alpha<\beta\leqq N}^{(U)} A'(2\sigma_\alpha\phi_\alpha - 2\sigma_\beta\phi_\beta) \times \gamma_\varepsilon^{\alpha\beta} = 0 \qquad (4.1-n)$$

を$n=1,2,\cdots$について満たせば、式(2.1)は次の形の解をもつ：

$$f = \sum_{\sigma=\pm 1} \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}[\sigma_\alpha\phi_\alpha + \phi_{0\alpha}(\sigma_\alpha)] + \sum_{1\leqq\alpha<\beta\leqq N} \Phi_{\alpha\beta}\right\} \qquad (4.2)$$

但し、式(4.1)においてUは添字集合$E=\{1,2,\cdots,N\}$の任意の集合を、$\sum_{\sigma=\pm 1}^{(U)}$は要素として

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ or } -1 & \text{for } \alpha \in U \\ 0 & \text{for } \alpha \notin U \end{cases} \qquad (4.3)$$

をもつベクトル$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N)$全てに渡る和を、$\prod_{1\leqq\alpha<\beta\leqq N}^{(U)}$は組$\sigma_\alpha$と$\sigma_\beta$，$(\alpha,\beta\in U,\ 1\leqq\alpha<\beta\leqq N)$全てについての積を表わすものとする。また、$A'(2\sigma_\alpha\phi_\alpha-2\sigma_\beta\phi_\beta)$は関係式

$$-\frac{A(2\sigma_\alpha\phi_\alpha-2\sigma_\beta\phi_\beta)}{A(2\sigma_\alpha\phi_\alpha+2\sigma_\beta\phi_\beta)} = \varepsilon\frac{A'(2\sigma_\alpha\phi_\alpha-2\sigma_\beta\phi_\beta)}{A'(2\sigma_\alpha\phi_\alpha+2\sigma_\beta\phi_\beta)},\quad \varepsilon=\pm 1, \qquad (4.4)$$

によって定義され、

$$\gamma_{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon = 1 \\ -\sigma_\alpha \sigma_\beta & \text{if } \varepsilon = -1 \end{cases} \qquad (4.5)$$

とする。また、式(4.2)において、$\phi_{0\alpha}(\sigma_\alpha = 1)$ と $\phi_{0\alpha}(\sigma_\alpha = -1)$ は一般には異なる定数で、

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \log \varepsilon_{\alpha\beta} A' (2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta) \qquad (4.6)$$

とする。ここに、$\varepsilon = 1$ に対しては $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$ で、$\varepsilon = 1$ に対しては

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_\alpha = \sigma_\beta \\ i = \sqrt{-1} & \text{if } \sigma_\alpha = -\sigma_\beta \quad \blacksquare \end{cases} \qquad (4.7)$$

この定理は、公式[4]

$$A \exp(\phi_\alpha) \cdot \exp(\phi_\beta) = A(\phi_\alpha - \phi_\beta) \exp(\phi_\alpha + \phi_\beta) \qquad (4.8)$$

を用いれば証明される。条件(4.1)は、本質的には定理1に現われる条件(3.8)と同等である。

§5. Bäcklund変換及び伊達の方法との関係

本節では、簡単の為、KdV 方程式を例にとって前節で得られた解とBäcklund変換及び伊達の方法[10]で得られる解と

の間の関係を示す。

まず、KdV 方程式に対しては前節で得られた解はWronskian形のN－ソリトン解に書き直せることを示す。KdV方程式の場合には、$\varepsilon = 1$、

$$A'(2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta) = 2\sigma_\alpha k_\alpha - 2\sigma_\beta k_\beta \qquad (5.1)$$

となる。このとき、Vandermonde 行列式に対する公式

$$\det \Delta_N = \prod_{1 \leqq \beta < \alpha \leqq N} \frac{k_\alpha - k_\beta}{k_\alpha + k_\beta} \qquad (5.2)$$

に注意すれば、前節で求めた解 f は

$$f = W\left(c_1^{(1)} e^{\phi_1} + c_1^{(2)} e^{-\phi_1},\ c_2^{(1)} e^{\phi_2} + c_2^{(2)} e^{-\phi_2},\ \cdots,\right.$$
$$\left. c_N^{(1)} e^{\phi_N} + c_N^{(2)} e^{-\phi_N} \right) \qquad (5.3)$$

と書き直せることがわかる。但し、Δ_N は $N \times N$ 行列で第α-β成分に $k_\beta^{\alpha-1}$ をもつもの、W は通常のN関数に対するWronskian である(x についての)。また、

$$c_\alpha^{(1)} = \exp \phi_{0\alpha}(1)\ ,\quad c_\alpha^{(2)} = \exp \phi_{0\alpha}(-1) \qquad (5.4)$$

で、以下

$$\psi_\alpha = c_\alpha^{(1)} \exp(\phi_\alpha) + c_\alpha^{(2)} \exp(-\phi_\alpha) \qquad (5.5)$$

と置く。式(5.3)はWronskian形のN－ソリトン解である。

ここで、式(5.3)で与えられる解がBäcklund変換を通して構成される解と一致することを示す。そのために、Wronskianを用いて定義される関数

$$f_0 = W(h_1, h_2, \cdots, h_n) \qquad (5.6\text{-}a)$$

$$f_1 = W(h_1, h_2, \cdots, h_n, h_{n+1}) \qquad (5.6\text{-}b)$$

$$f_2 = W(h_1, h_2, \cdots, h_n, h_{n+2}) \qquad (5.6\text{-}c)$$

及び

$$f_{12} = W(h_1, h_2, \cdots, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}) \qquad (5.6\text{-}d)$$

の間にJacobi の恒等式

$$D_x f_2 \cdot f_1 = f_{12} f_0 \qquad (5.7)$$

が成り立つことを注意する。但し，h_α，$(1 \leqq \alpha \leqq n+2)$ は x の任意関数である。式(5.7)は、KdV 方程式のBäcklund変換

$$\begin{cases} (D_x^2 - \lambda) f' \cdot f = 0 & (5.8\text{-}a) \\ (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0 & (5.8\text{-}b) \end{cases}$$

によって図1のように結びつけられている4つの解の間のsuperposition formula[11,12,9]と同じ形をしている。

但し、λは任意パラメータ、f 及び f' は式(2.1)の異る2つの解とする。また、図1は、式(2.1)の解の組(f_0, f_1)，(f_0, f_2)，(f_1, f_{12})，(f_2, f_{12})が式(5.8)をそれぞれパラメータλ_1,

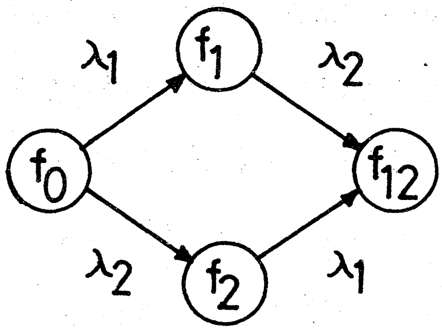

図1. 可換図式

$\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1$ で満たしていることを示すものとする。文献9の結果を用いれば、容易に、$\tilde{f}_0 = 1$ 、$\tilde{f}_1(k_i)$ を

$$\begin{cases} (D_x^2 - k_i^2)\,\tilde{f}_1(k_i)\cdot 1 = 0 & (5.9-a) \\ (D_t + 3k_i^2 D_x + D_x^3)\,\tilde{f}_1(k_i)\cdot 1 = 0 & (5.9-b) \end{cases}$$

の解、$\tilde{f}_\ell(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell})$ を

$$\begin{aligned} &D_x\, \tilde{f}_{\ell-1}(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}, k_{i+\ell})\cdot \tilde{f}_{\ell-1}(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}, k_{i+\ell-1}) \\ &= \tilde{f}_\ell(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}, k_{i+\ell-1}, k_{i+\ell})\, \hat{f}_{\ell-2}(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

を満たす関数のように帰納的に関数系 $\tilde{f}_\ell$ を決めてゆけば、関数 $\tilde{f}_\ell$ は式(2.1)の解となり、解の組 $(\tilde{f}_{\ell-1}(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}, k_{i+\ell-1}), \tilde{f}_\ell(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell}))$ および $(\hat{f}_{\ell-1}(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell-2}, k_{i+\ell}), \hat{f}_\ell(k_i, k_{i+1}, \cdots, k_{i+\ell}))$ は式(5.8)をそれぞれパラメータ $k_{i+\ell}^2$ および $k_{i+\ell-1}^2$ で満たすことがわかる。従って、$f=1$, $f' = \psi_\alpha$ が式(5.8)をパラメータ k_α^2 で満足することに注意すれば、関数 $f_N(k_1, k_2, \cdots, k_N) = W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)$ は、$\tilde{f}_0 = 1$, $\tilde{f}_1(k_\alpha) = \psi_\alpha$ から出発して以上のように superposition formula (5.10)を用いて構成される解と一致することがわかる。このようにして、式(5.3)で与えられる解が Bäcklund 変換(5.8)を通して構成される解と一致することが確かめられた。

次に、伊達の方法[10]で得られる解との関係を調べてみる。

広田[2]は、Bäcklund 変換(5.8)において $\chi = f'/f$ と置けば、式(5.8)から得られる χ に関する方程式

$$\begin{cases} \chi_{xx} - (\lambda - u)\chi = 0 & (5.11-a) \\ \chi_t + 3(\lambda + u)\chi_x + \chi_{xxx} = 0 & (5.11-b) \end{cases}$$

は KdV 方程式に対する逆散乱方程式となることを示している。但し、

$$u = 2(\log f)_{xx} \qquad (5.12)$$

である。従って、式(2.1)の解の組 $f = W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)$, $f' = W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N, \psi_{N+1})$ が式(5.8)をパラメータ $\lambda = k_{N+1}^2$ で満たすことを用いれば、関数

$$\chi_N = \frac{W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N, \psi_{N+1})}{W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)} \qquad (5.13)$$

は式(5.11-a, b)を

$$u = u_N = 2(\log W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N))_{xx}, \qquad (5.14)$$

及び $\lambda = k_{N+1}^2$ で満たすことがわかる。この結果は、薩摩[13]によって得られている結果と一致する。

以下、以上の結果から伊達の結果[10]が自然に導びかれることを示す。その為に、$c_{N+1}^{(2)} = 0$ と置く(式(5.5)参照)。すると関数 χ_N が

$$\chi_N(k_{N+1}) = \left(k_{N+1}^N + \sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu_\alpha(t,x) k_{N+1}^\alpha\right) e^{\phi_{N+1}} \qquad (5.15)$$

と書き直せることがわかる。但し、$C_{N+1}^{(1)}=1$とし、

$$\mu_\alpha(t,x)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ \partial\psi_1/\partial x & \partial\psi_2/\partial x & \cdots & \partial\psi_N/\partial x & \\ \partial^2\psi_1/\partial^2 x & \partial^2\psi_2/\partial^2 x & \cdots & \partial^2\psi_N/\partial^2 x & e_\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \partial^N\psi_1/\partial^N x & \partial^N\psi_2/\partial^N x & \cdots & \partial^N\psi_N/\partial^N x & \end{vmatrix}}{W(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_N)} \tag{5.16}$$

で、e_αは$N+1$次元縦ベクトルで第$\alpha+1$成分が1で残りの成分は零とする。また、Wronskianの性質から、関数$\chi_N(k_{N+1})$は関係式

$$\chi_N(k_\alpha)+c_\alpha\chi_N(-k_\alpha)=0,\quad(1\leqq\alpha\leqq N) \tag{5.17}$$

を満たすことがわかる。但し、$c_\alpha=C_\alpha^{(2)}/C_\alpha^{(1)}$。伊達の方法は逆に、式(5.11−a,b)の解として、式(5.15)の関数形をもち、式(5.17)の関係式を満たすものを仮定して、関数u_Nとμ_αを一意的にそれぞれ式(5.14)及び式(5.16)の形に決定する方法であった(文献10参照)。従って、我々の結果から伊達の結果が自然に従うことが示された。

§6. 注意

さて、以上に示した議論は任意個の従属変数を含む双線形

方程式に対しても容易に拡張できることを注意する。また、以上の議論は最近佐藤・三輪・神保氏によって展開されているHolonomic Quantum Fieldsの理論[14]と非常に良く似た部分をもつことを注意する。実際、Fredholm行列式は、Quantum Field Operatorsと密接な関係があることが知られており、事実、文献15, 16ではN－ソリトン解のfunctional integral representationが求められている。その結果を拡張すれば、一般化ソリトン解のfunctional integral表示も容易に求めることができる。また、N－ソリトン解のWronskian表示は、上野氏のMonodromy保存変形理論とソリトン理論の関係を明らかにする理論[17]の出発点にもなっている。また、Painlevé方程式は広田の方法で取り扱いうるものであり、例えばI, II形の方程式は次のように双線形化される：

［I形］ $w_{zz} = 6w^2 + z$, $w(z) = -(\log f(z))_{zz}$,

$$(D_z^4 + 2z)\, f\cdot f = 0$$

［II形］ $w_{zz} = 2w^3 + zw + \delta$, $w = -2i\left(\arctan \dfrac{g}{f}\right)_z$,

$$\begin{cases} (D_z^3 - zD_z)\, g\cdot f = \dfrac{i}{2}\delta\,(f^2 + g^2) \\ D_z^2\,(f\cdot f + g\cdot g) = 0 \end{cases}$$

このように密接な関係にある２つの理論の間の関係を明らかにすることは、今後の重要なしかも実り多い課題であると思われる。

文献

1) C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal and R.M. Miura: Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1095

2) R. Hirota: Prog. Theor. Phys. 52 (1974) 1498

3) R. Hirota and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. (1976) 64

4) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1341

5) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1037

6) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1701

7) R. Hirota: 核融合研究 40 別冊 3 (1978) 67

8) S. Oishi: to appear in J. Phys. Soc. Jpn. 48 No.2 (1980)

9) R. Hirota and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 1741

10) E. Date: Proc. Jpn. Academy 55 (1979) 27

11) M. Adler and J. Moser: Commun. Math. Phys. 61 (1978) 1

12) M.J. Ablowitz and J. Satsuma: J. Math. Phys. 19 (1978) 2180

13) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 359

14) M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo: Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1978) 223 等の一連の論文

15) R. Hirota and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1979) 1385

16) M. Wadati and K. Sawada: to appear in J. Phys. Soc. Jpn.

17) K. Ueno: Preprints RIMS 301, 302