数理解析研究所講究録
第 377 巻 1980 年 1-12

Subnormal 作用素のスペクトルによる穴うめ問題

神奈川大 工　　泉池 敬司

ヒルベルト空間上の subnormal 作用素のスペクトルはその極小 normal 拡大のスペクトルの holes のいくつかをうめたものになる。そこで1つの normal 作用素を固定して，それを極小 normal 拡大にもつ subnormal 作用素のスペクトルによる holes のうまり方に関する問題を考えたい。

§1. 準備

$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とする。N を $\mathcal{H}$ 上の normal 作用素（作用素はすべて有界とする）とする。N の不変部分空間でそれを含む最小の N かつ N^* 不変部分空間が $\mathcal{H}$ と一致するものを $H \subset \mathcal{H}$ とする時，N を H に制限した作用素を集めて $\mathcal{S}(N)$ と書くことにする。すなわち

$$\mathcal{S}(N) = \{N|_H \,;\ H \text{ は上の性質をみたす}\}。$$

いいかえると $\mathcal{S}(N)$ は N を極小 normal 拡大にもつ subnormal

作用素全体である。作用素のスペクトルを $\sigma(\cdot)$ で表わす。

定理（Bram, 1955）. $S \in \mathcal{S}(N)$ に対して $\sigma(S)$ は $\sigma(N)$ とそのいくつかの holes を集めたものである。

この定理より $\mathcal{S}(N)$ に含まれる作用素のスペクトルに関していくつかの問題が自然に生ずる。ここでは以下の問題に関して述べてみたい。

問題1. $\sigma(S)$ $(S \in \mathcal{S}(N))$ でうまる holes の見分け方は？

これは Conway and Olin によって N の scalar spectral 測度によって決定されることが示された。そこで $\sigma(N)$ の holes で $\sigma(S)$ $(S \in \mathcal{S}(N))$ によってうまる holes を $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ とする。つまり $\bigcup \{\sigma(S);\ S \in \mathcal{S}(N)\} = \sigma(N) \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots$

問題2. $\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2}, \ldots$ を指定した時 $\sigma(S) = \sigma(N) \cup \Lambda_{k_1} \cup \Lambda_{k_2} \cup \cdots$ なる $S \in \mathcal{S}(N)$ はいつでも存在するのか？

これは Olin and Thomson によって反例が示された。それ程自由に穴うめが出来ないわけである。そこで穴のうまり方に関して，逆のうまり方に関する問題が生ずる。

問題3. $S \in \mathcal{S}(N)$ で $\sigma(S) \supset \Lambda_1$, $\sigma(S) \cap \Lambda_2 = \phi$ とする。その時 $\sigma(S') \cap \Lambda_1 = \phi$, $\sigma(S') \supset \Lambda_2$ なる $S' \in \mathcal{S}(N)$ は存在するのか？

これは Thomson によって反例が示された。

問題4 holes が1つもうまらないような $(\sigma(S) = \sigma(N))$

$S \in \mathcal{S}(N)$, $S \neq N$ は存在するか?

問題5. すべてのΩ_iをうめつくす$S \in \mathcal{S}(N)$が存在するか?

ここで中心的な役割をするのがSarasonによる或るHardy空間の構造定理である。それを述べよう。μを複素平面上の有界Borel測度とする。$P^\infty(\mu)$で多項式の$L^\infty(\mu)$の中でのweak*-closureを表わすことにする。

定理(Sarason, 1972). $P^\infty(\mu)$は次の様に表現出来る。

$$P^\infty(\mu) = L^\infty(\mu-\tilde{\mu}) \oplus H^\infty(\operatorname{int}\tilde{K}, \tilde{\mu})$$

ここで イ) $\tilde{\mu} \le \mu$, $\tilde{\mu} \perp \mu-\tilde{\mu}$

ロ) $\tilde{K}$は閉部分集合で$\tilde{\mu}$のsupportを含み, $\partial\tilde{K}$は$\tilde{\mu}$のsupportに含まれる。

ハ) $H^\infty(\operatorname{int}\tilde{K}, \tilde{\mu})$は$\operatorname{int}\tilde{K}$で有界正則関数を$\tilde{\mu}$に制限したもの

ニ) $\tilde{\mu}|_{\partial\tilde{K}} \ll$ harmonic measure for $\tilde{K}$.

ホ) support μの各holesは$\tilde{K}$に完全に含まれるか$\tilde{K}$とdisjoint

注) $\operatorname{int}\tilde{K}$は$P^\infty(\mu)$が正則に拡張出来る最大の開集合になる

注) この定理の表わし方であると, 与えられたμより$\tilde{\mu}$, $\tilde{K}$の作り方がはっきりしないが, 証明を見ると具体的な測度μに対しては$\tilde{\mu}$, $\tilde{K}$が具体的にわかり, これを利用することにより上で上げた問題に関する例が作られる。

「以下μをNの$\sigma(N)$上のscalar spectral測度とし, $\tilde{K}$はそれに対応して定まるものとする」

N より生成される a-WOT closed algebra を $\mathfrak{A}(N)$, WOT closed algebra を $\mathcal{W}(N)$, von Neumann algebra を $\mathcal{W}^*(N)$ とする。 $P^\infty(\mu) \simeq \mathfrak{A}(N) = \mathcal{W}(N) \subset \mathcal{W}^*(N) \simeq L^\infty(\mu)$ である。

N が reductive の時 (N の不変部分空間に N^* に対しても同じ) $\mathcal{S}(N) = \{N\}$ であるので以下 N が non reductive の時の扱う。($L^\infty(\mu) \neq P^\infty(\mu)$ の時を扱う)。

§2. 問題 1 について

<u>定理</u> (Conway and Olin [3]).

$$\tilde{K} \setminus \sigma(N) = \bigcup \{ \sigma(S) \setminus \sigma(N) \,;\, S \in \mathcal{S}(N) \}$$

証明. [$\supset$] $\lambda \notin \tilde{K} \cup \sigma(N)$ とする。 $(z-\lambda)^{-1} \in P^\infty(\mu)$ よって $(N-\lambda)^{-1} \in \mathcal{W}(N)$。 $\therefore \lambda \notin \sigma(S)$ ($\forall S \in \mathcal{S}(N)$) (Sarason 定理使用)

[$\subset$] $\lambda \notin \sigma(S)$ ($\forall S \in \mathcal{S}(N)$) とする。 $(N-\lambda)^{-1}$ は N の不変部分空間を不変にする。よって別の Sarason 定理 ([6]) より $(N-\lambda)^{-1} \in \mathcal{W}(N)$。 $\therefore (z-\lambda)^{-1} \in P^\infty(\mu)$ $\therefore$ $\lambda \notin \tilde{K}$.

例 1 (すべての holes がうまる例)

μ_1 : 単位円周 $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 測度 $\mathcal{H} = L^2(\mu_1)$

$N = M_z$ on $L^2(\mu_1)$ (z を乗ずる作用素)

すると $\sigma(N) = \mathbb{T}$, $\mu = \mu_1$, $\tilde{K} =$ 単位円板, $\hat{\mu} = \mu_1$, よって holes はすべてうまる (1つしかないが)。

例2 (うまらない holes がある例)

λ_n: Γ 上で dense で可算部分集合

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \delta_{\lambda_n}, \quad \mathcal{H} = L^2(\mu_2), \quad N = M_z \text{ on } L^2(\mu_2)$$

すると $\sigma(N) = \Gamma$, $\mu = \mu_2$, $\hat{\mu} = 0$, $\hat{K} = \phi$, うまる holes なし。

§3. 問題2について.

<u>定理</u> (Olin and Thomson [4]). Ω_1, Ω_2 をうまる holes とする. 次は同値である。

(a) $\sigma(S) \cap \Omega_1 = \phi$, $S \in \mathcal{S}(N)$ ならば $\sigma(S) \cap \Omega_2 = \phi$

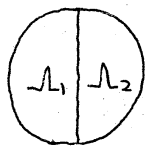
(b) $K = \bigcup \{\sigma(S) ; S \in \mathcal{S}(N)\} \setminus \Omega_1$ とし, $R^\infty(\mu)$ で K の外に poles をもつ有理関数の $L^\infty(\mu)$-closure とする。その時

$$(z-a)^{-1} \in R^\infty(\mu) \quad \text{for some point } a \in \Omega_2.$$

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) (a) 成立しないとする。$a \in \Omega_2$ (に対して) $(N-a)^{-1}$ は $\{g(N) ; g \in R(K)\}$ より生成される weakly closed algebra $\mathfrak{A}$ に含まれない。よって $(z-a)^{-1} \notin R^\infty(\mu)$。 (a) $\Rightarrow$ (b). (b) 成立しないとする。$(N-a)^{-1} \notin \mathfrak{A}$ である. Sarason 定理 ([6], Theorem 2) より $\mathfrak{A}$-invariant で $(N-a)^{-1}$-invariant でない部分空間 $\mathfrak{M}$ がある。$\mathcal{L}$ を $\mathfrak{M}$ を含む最小の N, N^*-invariant subspace とし $H = \mathfrak{M} \oplus (\mathcal{H} \ominus \mathcal{L})$ とする。$S = N|_H \in \mathcal{S}(N)$ であり $\sigma(S) \cap \Omega_1 = \phi$ かつ $\sigma(S) \supset \Omega_2$ で矛盾.

この定理より問題2に関する反例が作られる。

例3.　単位円板内の $-1<y<1$ の部分に可算denseな点を λ_n とする。



$\mu_3=\mu_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta_{\lambda_n}$ とする。

$\mathcal{H}=L^2(\mu_3)$, $N=M_z$ on $L^2(\mu_3)$ とする。

$\sigma(N)=$  $\mu=\mu_3$, $\tilde{\mu}=\mu$ よって holes は Ω_1,Ω_2 の2つ。
$\tilde{K}=$  より Ω_1,Ω_2 はうまる holes である。定理の $R^\infty(\mu)$ を見ると $R^\infty(\mu)=L^\infty(\mu)$ である。よって(b)成立する。よって $\sigma(S)\cap\Omega_1=\phi$, $\sigma(S)\supset\Omega_2$ なる $S\in\mathcal{S}(N)$ は存在しない。
(この場合 Ω_2 だけ指定しても、Ω_2 だけうめる $S\in\mathcal{S}(N)$ はない)

注) 指定した holes がすべてうまくうまる様な例は多い。
たとえば例3において $-1<y<1$ の部分の Lebesgue 測度を μ_4' として、$\mu_4\equiv\mu_1+\mu_4'$ で作られる例を考えると良い。

上の定理は次の形に拡張される。(証明は同じ)

<u>定理</u>。$\Omega_0,\Omega_{k_1},\Omega_{k_2}\cdots$ は異なるうまる holes とする。次は同値である。

(a) $\sigma(S)\cap\Omega_{k_i}=\phi\ (i=1,2\cdots)$, $S\in\mathcal{S}(N)$ ならば $\sigma(S)\cap\Omega_0=\phi$

(b) $K=\bigcup\{\sigma(S);\ S\in\mathcal{S}(N)\}\setminus\bigcup\Omega_{k_i}$ とする時
$(z-a)^{-1}\in R^\infty(\mu)$ for some point $a\in\Omega_0$

§4. 問題3について

§3の定理(a)をみたす Ω_1,Ω_2 に対して、逆に

「$\sigma(S)\cap\Omega_2=\phi$, $S\in\mathcal{S}(N)$ ならば $\sigma(S)\cap\Omega_1=\phi$」? が成立するかという問題が生ずる。これが問題3である。肯定的な例は多く見つかるので反例を示そう。

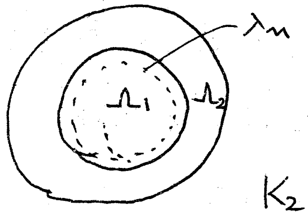
例4 (Thomson, 1978). Δを0中心の半径$\frac{1}{2}$の開円板とする。Ruhel and Shields [5] によりΔの中に疎な可算点列λ_nで

$$\sup_{\lambda\in\Delta}|f(\lambda)| = \sup_{n}|f(\lambda_n)| \qquad \forall f\in H(\Delta)$$

なるものが取れる。

$$\mu_5=\mu_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta_{\lambda_n} \qquad \mathcal{H}=L^2(\mu_5),\ N=M_z \text{ on } L^2(\mu_5)$$

とする。$\sigma(N)=\Gamma\cup\overline{\{\lambda_n\}}$, $\mu=\mu_5$, $\tilde{\mu}=\mu_5$, $\tilde{K}$=単位円板



うまる holes は Ω_1 と Ω_2 である。

K_1 = 単位円板 $\setminus\ \Omega_1$ とすると $R^\infty(\mu)=L^\infty(\mu)$

K_2 = 単位円板 $\setminus\ \Omega_2$ とすると、

$$R^\infty(\mu)=L^\infty(\mu_1)\oplus P^\infty\left(\sum\left(\frac{1}{2}\right)\delta_{\lambda_n}\right)\cong L^\infty(\mu_1)\oplus H^\infty(\Delta)$$

よって§3の定理より

$$\begin{cases}\sigma(S)\cap\Omega_1=\phi,\ S\in\mathcal{S}(N) \text{ ならば } \sigma(S)\cap\Omega_2=\phi \\ \sigma(S)\cap\Omega_2=\phi,\ \sigma(S)\supset\Omega_1,\ S\in\mathcal{S}(N) \text{ なる } S \text{ が存在する}\end{cases}$$

§5 問題4について

問題4が成立する例もしない例もすぐに見つかる。例1は成立しない例である。成立する例としては、$\frac{1}{2}<|z|<1$ 上の平面測度をμとして $L^2(\mu)$, $N=M_z$ on $L^2(\mu)$ を考えると良い。そこ

でここでは成立するための必十条件を与える。

定理. $\alpha(N)=\alpha(S)$, $S\neq N$, $S\in\mathcal{S}(N)$ ある。

$\Longleftrightarrow$ $L^\infty(\mu)\neq R^\infty(\alpha(N))$ (= $\alpha(N)$の外にpolesをもつ有理関数 $R(\alpha(N))$ の $L^\infty(\mu)$-w* closure)

証明.(⇒) $S\in\mathcal{S}(N)$, $\alpha(N)=\alpha(S)$ とする。$S=N|_M$, $M\subset\mathcal{H}$ と表わせる。$r\in R(\alpha(N))$ に対して $r(N)M\subset M$ より, もし $L^\infty(\mu)=R^\infty(\alpha(N))$ ならば M は N の reducing subspace となってしまう. よって $S=N$ で矛盾。(⇐) 条件より $\exists\varphi\in L^\infty(\mu)\setminus R^\infty(\alpha(N))$. Sarason定理[6] より $\mathcal{H}$の部分空間 M_0 で $\varphi(N)$-invariant でなく, $\psi(N)$-invariant ($\forall\psi\in R^\infty(\alpha(N))$) なるものが存在する. $\tilde{M}_0$ で M_0 を含む最小の N,N^*-invariant部分空間とすれば, $S=N|_M$, $M=(\mathcal{H}\ominus\tilde{M}_0)\oplus M_0$, は条件をみたす。

§6 問題5について。

$\mathcal{S}(N)$の中のpureのものを集めて$\mathcal{S}_p(N)$と書くことにする。$\mathcal{S}(N)\ni S$ がpureであるとは, Sの不変部分空間でN,N^*-不変となるものは$\{0\}$だけになるものをいう。

定理 $\bigcup\{\alpha(S);\ S\in\mathcal{S}(N)\}=\alpha(S_0)$ となる $S_0\in\mathcal{S}(N)$が存在する。

証明. まず特殊な場合に上の定理が成立することを示し,後に一般に成立することを示そう。

[I] 「$N = M_z$ on $L^2(\mu)$, $P^\infty(\mu)$ は L^∞-part を持たないとする。その時 $\cup\{\sigma(S);\ S\in\mathcal{S}(N)\} = \sigma(S_0)$ なる $S_0 \in \mathcal{S}_p(N)$ が存在する」

(i) Conway and Olin ([3], Prop. 9.6) より次をみたす $f_0\in L^2(\mu)$ が存在する。 $|f_0|>0$ a.e. $d\mu$

H = norm closure of $\{pf_0;\ p$ は多項式$\}\subset L^2(\mu)$ は L^2-part なしすると $H \ni pf_0 \longrightarrow p\in H^2(|f_0|^2\mu)$ は isometry, linear onto で $H^2(|f_0|^2\mu)$ は L^2-part を持たない。ここで $H^2(\cdot)$ は多項式の $L^2(\cdot)$-closure を表わす。$|f_0|^2\mu$ と μ は互いに絶対連続である。$\Lambda_1,\Lambda_2,\dots$ で $\sigma(N)$ のうまる holes とする。Conway and Olin の定理より M_z-不変部分空間 $H_n\subset L^2(\mu)$ で, $S_n = M_z$ on H_n は $\mathcal{S}(N)$ に含まれて $\sigma(S_n)\supset\Lambda_n$ となるものが存在する。そこで $\lambda_n\in\Lambda_n$ とすると $(z-\lambda_n)H_n$ は H_n の proper な部分空間になる。$f_n\in H_n$ ($f_n\neq 0$), $f_n\perp(z-\lambda_n)H_n$ をとり $\{pf_n;\ p$ は多項式$\}$ の $L^2(\mu)$-closure を L_n とおく。$(z-\lambda_n)L_n \subsetneqq L_n$ であるから $S_n' = M_z$ on L_n は subnormal 作用素で $\sigma(S_n')\ni\lambda_n$ である。$S_n'' = M_z$ on $H^2(|f_n|^2\mu)$ とすると, $\sigma(S_n'')=\sigma(S_n')\ni\lambda_n$ であるから $(z-\lambda_n)^{-1}\notin H^2(|f_n|^2\mu)$ である。そこで $\nu \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n|f_n|^2\mu$ とおく, a_n は正で ν の norm が有界になるようにとる。$H^2(\nu)\not\ni(z-\lambda_n)^{-1}$ $n=1,2\cdots$ である。$H^2(\nu)$ は作り方より L^2-part を持たない。$S_0' = M_z$ on $H^2(\nu)$ とすると, $\sigma(S_0')\ni\lambda_n$ ($n=1,2,\cdots$) であるから $\sigma(S_0')\supset\Lambda_n$ ($n=1,2,\cdots$)

である。$\nu = g\mu$, $g \in L^1(\mu)$ $(g \geq 0)$ とする。

Φ : $H^2(\nu) \ni h \longrightarrow g^{\frac{1}{2}} h \in L^2(\mu)$

は isometry into linear であり $\Phi(H^2(\nu))$ は N-不変である。

又 $\Phi(H^2(\nu))$ は L^2-part を持たない。$S_0 = M_z$ on $\Phi(H^2(\nu))$

とおくと始めの条件をみたす。

[II] 次に「$N = M_z$ on $L^2(\mu)$」の時に示そう。Sarason定理より $P^\infty(\mu) = L^\infty(\nu_1) \oplus H^\infty(\mathrm{int}\,\widetilde{K}, \nu_2)$, $\mu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 \perp \nu_2$

と表わせる。すると $N = N_1 \oplus N_2$ on $L^2(\nu_1) \oplus L^2(\nu_2)$, $N_i = M_z$

on $L^2(\nu_i)$ $(i = 1, 2)$ である。[I] より $S_2 \in \mathcal{S}_p(N_2)$ で

$\cup\{\alpha(S) ; S \in \mathcal{S}(N_2)\} = \alpha(S_2)$ を満たすものが存在する。

$S = N_1 \oplus S_2$ は求める作用素になる

[III] N を任意の normal 作用素とすると $N = \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_n$ と表

わせる。ここで $\mu_1 = \mu$, $\mu_{n+1} \ll \mu_n$, $N_n = M_z$ on $L^2(\mu_n)$ で

ある。[II] より $\cup\{\alpha(S) ; S \in \mathcal{S}(N_1)\} = \alpha(T_1)$ となる $T_1 \in \mathcal{S}(N_1)$

が存在する。$T_1 = M_z|_R$, $R \subset L^2(\mu_1)$ とする。

$S = T_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \cdots$ on $R \oplus L^2(\mu_2) \oplus L^2(\mu_3) \oplus \cdots$ とおくと,

S が求める作用素である。

§7 $\mathcal{S}_p(N)$ のスペクトルによる穴うめ問題

問題 1-5 を $\mathcal{S}_p(N)$ に関するスペクトルで置き換えた場合について考えてみる。一般に N は次の様に表わされる。

$$\begin{cases} N = M_z^1 \oplus M_z^2 \oplus \cdots \quad \text{on } L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2) \oplus \cdots \\ M_z^n = M_z \text{ on } L^2(\mu_n), \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu_n \ll \mu_{n-1} \end{cases}$$

ここで $N = M_z$ on $L^2(\mu)$ の場合 Conway and Olin の結果「$\mathcal{S}_p(N) \neq \phi \iff P^\infty(\mu)$ は L^∞-part なし」に注意して３つの場合に分ける。

イ) $N = M_z$ on $L^2(\mu)$ かつ $P^\infty(\mu)$ は L^∞-part なし

ロ) $N = \sum \oplus M_z^n$ on $\sum \oplus L^2(\mu_n)$ かつ $P^\infty(\mu_k)$ は L^∞-part なし ($\forall k$)

ハ) $N = \sum \oplus M_z^n$ on $\sum \oplus L^2(\mu_n)$ かつ $P^\infty(\mu_k)$ は L^∞-part あり（ある k に対して）

イ) の場合

問題５は§６の定理の[I]より成立する。よって問題１も成立する（Conway and Olin と同様に）。問題２の反例も例３で良い。問題３も例４を少し変えるとこの場合の反例になる。問題４については同様に次の形で表わせる。

「$\alpha(N) = \alpha(S)$, $S \neq N$, $S \in \mathcal{S}_p(N)$ あり

$\iff R^\infty(\alpha(N))$ は L^∞-part なし」

ロ) の場合

問題１と問題５はそのまま成立する（この場合にも $\mathcal{S}_p(N) \neq \phi$ はすぐにわかる）。問題３と２は存在しない例が作られる。同様に問題４が成立つ条件が求められる。

ハ) の場合

$\sigma_p(N) \neq \phi$ となるための条件が十分にわからない。よって $\sigma_p(N) \neq \phi$ の時問題1－5がどの様になるのかわからない。

参考文献

1. Ball, Olin and Thomson, Weakly closed algebras of subnormal operators, Ill. J. Math. 22 (1978), 315-326.
2. Bram, Subnormal operators, Duke Math. 22 (1955), 75-98
3. Conway and Olin, A functional calculus for subnormal operators II, Memo. Amer. Math. Soc. 184 (1977)
4. Olin and Thomson, The spectrum of a normal operator and the problem of filling in holes, Indiana Math. Jour., 26 (1977), 541-544.
5. Rubel and Shields, The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966) 235-277.
6. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17 (1966), 511-517
7. Sarason, Weak-star density of polynomials, J. Reine Angew Math., 252 (1972), 1-15