

虚アーベル体の相対類数

都立大 理学部 飯村 清明

1°  $K/\mathbb{Q}$  を実アーベル拡大,  $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ,  $E \in K$  の単数群,  $h$  は  $K$  の類数,  $f$  は  $K$  の conductor とし,  $C := \langle -1, \lambda^{1-\sigma} \mid \sigma \in G \rangle$ ,  $\lambda = \prod_{a \in H} (1 - \zeta_f^a)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\zeta_f = \exp(\pi i / 2f)$ ,  $H$  は類体論の意味で  $K$  に対応する  $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$  の部分群とする.  $\exists a \in H$ ,  $C$  は  $E$  の部分群となるが, Hasse [3], Satz 3 は,

$$(1) \quad [E : C] = g \cdot h$$

を主張している. ここで,  $g = \prod (1 - \chi(p))$ , 積は,  $K$  に属する non-trivial, primitive Dirichlet characters  $\chi$ , 及び  $f$  の素因数  $p$  についてとる. ( $g = 0$  である様な体  $K$  に対しては, (1) は,  $C$  が  $E$  にあつて finite index を有しないことを意味することに注意.) さて,  $p \in \text{odd prime}$  とし,  $p^n$ -分体  $K = \mathbb{Q}(\mu^{p^n})$  とする. Iwasawa [4] は, (1) の analogue と思われる次の関係式を発見した:  $[R^- : \underline{S}^-] = h^-$ , ここで  $R^- = \{ \alpha \in \mathbb{Z}[G(K/\mathbb{Q})] \mid \alpha(1+j) = 0 \}$ ,  $j \in G(K/\mathbb{Q})$  は Complex

conjugation が induce するもの;  $\underline{S}$  は,  $2^\circ$  で定義する level  $p^n$  の Stickelberger ideal of  $R$ ;  $\underline{S}^- = R^- \cap \underline{S}$ ;  $\mathfrak{h}^-$  は  $K$  の相対類数, i.e.,  $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}/\mathfrak{h}^+$ ,  $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}^+)$  は  $K$  ( $K$  の最大実部分体) の類数.  $\therefore$  この同値は, 任意の虚  $p$ -ベルンスタイン体に対して, (1) の analogue を思わせた関係式を導くことにあ  
る.

$\therefore$   $\therefore$ , Sinnott [7] 及び Schmidt [8] の結果に照らしてよく必要がある. 前者は, 任意の円分体に対して, index  $[R^- : \underline{S}^-]$  を完全に計算した.  $\underline{S}$  は,  $p$  を  $2$  の levels の Stickelberger elements によって生成される Stickelberger ideal. 後者は, Leopoldt [6] Satz 20 で得られている formula の analogue を任意の虚  $p$ -ベルンスタイン体に対して与え, また, (1) の analogue も任意の虚  $p$ -ベルンスタイン体に対して与えた. あとの方の formula は, 私たちのそれと同じであるが, 証明が少し異なる.

$2^\circ$ . 以下, 次の記号を用いることにする:  $K/\mathbb{Q}$  は虚  $p$ -ベルンスタイン体,  $\mathfrak{z}$  の degree は  $n$ ,  $f$  は  $\mathfrak{z}$  の conductor,  $G = G(K/\mathbb{Q})$ ,  $R = \mathbb{Z}[G]$ ,  $j \in G$  は, complex conjugation が induce するもの,  $R^- = \{ \alpha \in R \mid (Hj)\alpha = 0 \}$ ,  $\mathfrak{h}^-$  は  $K/K^+$  の相対類数,  $K^+$  は  $K$  の最大実部分体,  $\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}H$  は, 類体論の  $\mathfrak{z}$  が  $K$  に対応する  $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$  の部分群.

また,  $\underline{S}^* = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \left(\frac{k}{a}\right) a$ ;  $\underline{S} = \underline{S}R \cap R$ ,  $\iota \in \text{Lang}[5]$  に従って,  $\text{level } f$  a Stickelberger ideal と呼ぶことにする.  $e^- = (1-j)/2$ ,  $\underline{S} = e^- \underline{S}$ ,  $\underline{S} = SR \cap R$ .  $\iota$  は  $R$ -ideal とする.  $\text{index}[R^- : \underline{S}^*]$  を計算する.

今,  $L, M \in \mathbb{Q}[G]$  の有限生成  $\mathbb{Z}$ -modules とし,  $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \supseteq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  とする.  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $T: L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .  $T$  は linear transformation とし,  $T(L) = M$ .  $\lambda$ :  $\mathbb{Z}$  symbol  $(L:M)$  を  $|\det(T)|$  で定義する.  $\lambda$  は容易に  $\lambda \in \mathbb{Z}$  とわかる.  $(L:M)$  は,  $T$  の  $\lambda$  因子に依存する;  $(L:M) = [L:M]$  ( $L \supseteq M$  である限り);  $N$  が  $\mathbb{Q}[G]$  の有限生成  $\mathbb{Z}$ -module とし,  $(L:M)$ ,  $(M:N)$  が定義される限り,  $(L:N) = (L:M)(M:N)$ .

また,  $\lambda$  の symbol を用いる:

$$[R^- : \underline{S}] = (R^- : e^-R)(e^-R : e^-RS)(e^-RS : \underline{S}).$$

先ず,  $(R^- : e^-R) = 2^{-n/2}$ ;  $(e^-RS : \underline{S})$  の計算のため,  $\lambda \in \mathbb{N}$  と  $\lambda \underline{S} \in R$  とする最小数とわかる.

Lemma 1  $e^-RS = RS$  であり,  $RS/\underline{S} \cong \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$ ; 従って,  $(e^-RS : \underline{S}) = [RS : \underline{S}] = \lambda$ .

( $\because$ )  $\varphi: RS \rightarrow \mathbb{Z}$  と  $\varphi(\sum a_i \sigma_i) = \lambda a_1$  とし,  $\psi: \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$  は canonical homo. とし,  $\theta = \psi \circ \varphi$  とする.

$$0 \rightarrow \underline{S} \xrightarrow{\text{incl}} RS \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$(e^-R : e^-RS)$  は,  $T: e^-Q[G] \rightarrow e^-Q[G]$  と  $T(u) = uS$

ここで  $\chi$  は  $\chi + 1$  ならば,  $(e^{-R}: e^{-R}S) = |\det(T)| = |\prod \chi'(S)|$ ; 同様.

$G$  の odd characters  $\chi'$  には  $\chi \in \chi'$  がある.  $\chi'(S)$  は  $\chi$  の  $\chi'$  である. [3], §8

に 5.1). Lemma 2.2. 各 odd character  $\chi'$  of  $G$  には  $\chi + 1$ ,  $\chi \in \chi'$  の  $S$

induce する primitive odd Dirichlet character  $\chi$  があり,  $f_\chi \in \chi$  の

conductor;  $\Delta(\chi) = \frac{1}{f_\chi} \sum_{\substack{1 \leq a \leq f_\chi \\ (a, f_\chi) = 1}} \chi(a) a$  である.

$$\chi(S) = \prod_{p|f} (1 - \overline{\chi}(p)) \Delta(\chi).$$

$\chi$  は  $\chi$ ,  $\chi \in K$  である primitive odd Dirichlet characters

の  $\Delta(\chi) \neq 1$ .  $g^- = \prod_{\substack{p|f \\ \chi \in \chi}} (1 - \chi(p))$  である.  $(e^{-R}: e^{-R}S) = g^- \prod_{\chi \in \chi} \Delta(\chi)$ .

$h^-$  の analytic formula (cf. [3], Chap I) は.

$$h^- = Qw \prod_{\chi \in \chi} (-\rho(\chi)/2).$$

$Q$  は  $Q = 1$  or  $2$  である.  $w$  は  $w = 1$  or  $2$  である.

以上より  $(e^{-R}: e^{-R}S) = 2^{-w/2} g^- h^- / (Qw)$ .

Prop. 1.  $[R^-: S] = (1/Qw) g^- h^-$ .

3° 各 prime  $p$  には  $D(p)$  ( $I(p)$ ) は  $G$  の  $p$  の decomposition (inertia) group がある.

Prop. 2.  $g^- \neq 0 \Leftrightarrow j \in \bigcap_{\text{all } p} D(p)$ ;  $\chi$  は  $g^- = \prod \chi^{n(p)}$

である.  $p|f$  ならば  $j \notin I(p)$  ならば  $p$  は  $\chi$  の conductor である.

(\*)  $\chi^+ = \{ \text{primitive even Dirichlet characters associated to } K \}$ ,  $\tilde{\chi} = \chi \cup \chi^+ \text{ と } \chi \neq \chi^+ \text{ ならば}$ .  $\prod_{\chi \in \tilde{\chi}} (1 - \chi(p)p^{-\lambda})$   
 $= \prod_{\chi \in \tilde{\chi}} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) / \prod_{\chi \in \chi^+} (1 - \chi(p)p^{-\lambda})$  for any  $\lambda \in \mathbb{C}$  である.  
 知られたように、 $\prod_{\chi \in \tilde{\chi}} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) = \prod_{\substack{\chi \in \text{in } K \\ p \mid P}} (1 - N\chi^{-\lambda})$ ;  
 $\prod_{\chi \in \chi^+} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) = \prod_{\substack{\chi \in \text{in } K^+ \\ p \mid P}} (1 - N\chi^{-\lambda})$ .  $\chi = \chi^+ \text{ ならば } \lambda \rightarrow 0 \text{ と}$   
 すれば、上の Lem. の後半を使う。前半に適用して、殊しく  
 明らかである。  $\square$

さて、 $\lambda \in \mathbb{N}$  と  $\lambda s \in \mathbb{R}$  とみれば最小数とする。

Lem. 3.  $N \in \mathbb{Q}^{(f)}$  の  $K \cap \mathbb{Q}$  の norm とし、 $\zeta_f = \exp(\pi i / 2f)$  とすれば、 $\lambda$  は  $N(\zeta_f)$  の order である。  $\lambda$  及び  $(\mathbb{Q}^{(f)}:K)$  が odd ならば、 $\lambda = 2\lambda'$  であり、その他の場合には、 $\lambda = \lambda'$ 。

(\*) Gras [1] p37. Cor. II 3, によれば、 $\lambda = f / (f, \sum_{\sigma \in G} \sigma a)$  である。明らか  $N(\zeta_f)$  の order である。  $\lambda$  と  $\lambda'$  との関係は  
 関係式  $S = \lambda' - (\mathbb{Q}^{(f)}:K) / 2 \cdot \sum_{\sigma \in G} \sigma a$  を使えば得られる。  $\square$

$N(\zeta_f)$  について調べるために、 $K$  の任意の 1 のべき根  $\alpha$  に対して、その order を  $o(\alpha)$  と書き、各 prime  $p$  に対して、 $\text{ord}_p f \in n(p) \leq o(\alpha)$ 。

Lem. 4.  $p \mid f$ , fixed. に対して、 $n' = n(p)$ ,  $L = K \cdot \mathbb{Q}(\zeta_{p^{n'}})$ ,  $K_0 = K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{p^{n'}})$  とすれば、 $\text{ord}_p o(N(\zeta_f))$  は、 $\text{ord}_p o(N_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n'}})/K_0}(\zeta_{p^{n'}}))$  に等しい。

Lem. 5.  $g \neq 0$  を仮定すれば、各 odd prime  $p \mid f$  に対して

1  $\tau$ ,  $\text{ord}_p o(N(\beta_f)) = \text{ord}_p w$ . 従って  $\tau (\sqrt{w})^{-1} \in \mathbb{Z}$  である。

2  $\alpha \neq \tau$  である。  $(\sqrt{w})^{-1} \in \mathbb{Z}$  である。 Lem. 3 の 3.3.3 を用いる。

Lem. 6.  $n' = \text{ord}_2 f$ ;  $L = K \cdot \mathbb{Q}^{(2^n)}$ ;  $K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(2^n)}$ .

とすることができる。  $\text{ord}_2 o(N(\beta_f))$  は  $\alpha$  とおき  $\tau$  である。

Case 1.  $w \equiv 0(4)$ .  $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = \max\{0, \text{ord}_2 w - \text{ord}_2(\mathbb{Q}^{(2^n)}:L)\}$ .

Case 2.  $w \equiv 2(4)$  かつ  $K_0 \not\subset \mathbb{R}$ .  $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = 1$  if  $(\mathbb{Q}^{(2^n)}:L)$

is odd; = 0 if not.

Case 3.  $K_0 \subset \mathbb{R}$ .  $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = 0$ .

Remark.  $w \equiv 0(4)$  のとき、  $g^{-1} \neq 0$  は仮定することができる。  $f$  の odd prime factor は  $\tau \equiv 3(4)$  である。 ことか云える。

以上 2 Lemmas から、 次の  $\sqrt{w}$  に関する information が得られる：

Prop. 3.  $g^{-1} \neq 0$  は仮定する。 記号は Lem. 6 と同じ。

Case 1.  $\sqrt{w} = 2^{-t}$ ,  $t = \min\{\text{ord}_2 w, \text{ord}_2(\mathbb{Q}^{(2^n)}:L)\}$ .

Case 2.  $\sqrt{w} = 1$  if  $(\mathbb{Q}^{(2^n)}:L)$  is odd; =  $1/2$  if not.

Case 3.  $\sqrt{w} = 1$  if  $(\mathbb{Q}^{(2^n)}:K)$  is odd; =  $1/2$  if not.

Cor.  $N := \{p \mid \text{prime}, p \mid f\}$  とする。  $w \equiv 0(4)$  のとき、  $g^{-1} \neq 0$  は仮定することができる。  $\sqrt{w} = 2^{-t}$ ,  $t = \min\{\text{ord}_2 w, \text{ord}_2 w + N - 2 - \text{ord}_2 n\}$ .

Remark. Q.1 の  $u$  である。 [3] §§ 20-26 を参照する。

4°.  $u \langle \tau \rangle$  の例は  $u \in [R : \underline{L}]$  に計算される。

Prop 4.  $f$  が素数中なら、 $[R^- : \underline{S}] = h^-$ ;  $f$  が composite なら、 $g^- \neq 0$  かつ  $\exists p$ : odd prime st  $j \in T(p)$  であるならば、 $[R^- : \underline{S}] = g^-/2 \cdot h^-$ .

( $\because$ )  $f$  が素数  $p \wedge \neq a$  のときは、[3] Satz 22 により  $Q=1$ . また  $g^- = 1$ .  $p \neq 2$  なら Prop 3. Case 3 により  $N/w = 1$ ;  $p=2$  なら  $L = \mathbb{Q}^{(f)}$  であるから Prop 3. Case 1 により  $N/w = 1$ . 次に  $p \neq 2$ ,  $j \in T(p)$  と仮定すれば、 $K_0$  は real であるから  $|H| = (\mathbb{Q}^{(f)} : K)$  は even である。だから Prop 3. Case 3 により、 $N/w = 1/2$ . 又、 $a$  のときは、[3] Satz 16 により  $Q=1$   $\square$

Cor.  $g^- = 1$  のときは、 $[R^- : \underline{S}] = h^-$  ( $f$  が素数中  $a$  のとき);  $= h^-/2$  ( $f$  が composite のとき)

Remark.  $g^- \neq 0$  と仮定し  $n$  のときのことを示すには、 $\Lambda$  が even なら  $\underline{S} = \underline{S}^-$ ;  $\Lambda$  が odd なら  $[\underline{S} : \underline{S}^-] = 2$ . だから上の Cor は、 $g^- = 1$  なら  $[R^- : \underline{S}^-] = h^-$  を主張している。

Prop. 5.  $f$  が composite なら  $G$  の Sylow 2-subgroup  $S_2$  が cyclic なら  $g^- \neq 0$  と示すには、 $[R^- : \underline{S}] = g^-/2^2$  if  $w \equiv 0 \pmod{4}$  &  $N \geq 3$ ;  $= g^-/2 \cdot h^-$  otherwise.

( $\because$ )  $G = S_2 \times M$  (direct) とし、 $M$  の fixed field を  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{K}$  の unit index を  $\tilde{Q}$  とすると、 $\tilde{K}/\mathbb{Q}$  は cyclic かつ [3] Satz 23 により  $\tilde{Q} = 1$ . (かつ  $(K : \tilde{K}) = \text{odd}$  であるから [3] Satz 15 により)  $Q=1$





- [3] H. Hasse, "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper." Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1952).
- [4] K. Iwasawa, "A class number formula for cyclotomic fields" Ann. of Math. 76 (1962), 171-179.
- [5] S. Lang, "Cyclotomic fields" Springer-Verlag (1978).
- [6] H.-W. Leopoldt, "Über Einheitsgruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper", Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Nat. 2 (1953).
- [7] W. Sinnott "On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field" Ann. of Math. 108 (1978), 107-134.
- [8] C.-G. Schmidt "Größencharaktere und Relativklassenzahl abelscher Zahlkörper". J. of Number Theory 11 (1979), 128-159.