数理解析研究所講究録
第 378 巻 1980 年 67-75

Solvably closed 拡大の Galois 群の準同型

東北大理　内田興二

k_1 及び k_2 を有限次代数体とし，Ω_1 及び Ω_2 をそれぞれの solvably closed な Galois 拡大とする。　$G_1 = G(\Omega_1/k_1)$ 及び $G_2 = G(\Omega_2/k_2)$ をそれらの Galois 群とする。　2つの Galois 群が同型のときには次の定理が成り立つ。

定理[1]．$\sigma : G_1 \to G_2$ を位相群の同型とすると，体の同型 $\tau : \Omega_2 \to \Omega_1$ が一意に定まって，任意の $g_1 \in G_1$ に対して $\tau \cdot \sigma(g_1) = g_1 \tau$ が成立つ。

この定理の σ を準同型とすると，上の条件をみたす τ が対応したとしても，それは中への同型となるはずであるが，σ にどのような条件を入れると τ が対応するのかを知りたい。まず最初に Galois 群の自明でもなく同型でもない準同型写像がどんな場合に得られるか例をあげる。

k_2を有限次代数体，Ω_2をsolvably closedなGalois拡大とし，$G_2=G(\Omega_2/k_2)$とする。τをΩ_2の任意の同型写像とし，k_1を有限次代数体で$\tau(k_2)$を含むものとする。Ω_1をk_1のsolvably closed Galois拡大で$\tau(\Omega_2)$を含むものとする。$G_1=G(\Omega_1/k_1)$とすると次の図からわかるように，自然な準同型$G_1\to G_2$が得られる。

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega_1 \arrow[d, dash] \arrow[dd, bend left=60, dash, "G_1"] \\
\Omega_2 \arrow[r] \arrow[dd, dash, "G_2"'] & \tau(\Omega_2) \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash, "\tau G_2 \tau^{-1}"'] & k_1\cdot\tau(\Omega_2) \arrow[d, dash] \\
 & & k_1 \arrow[dl, dash] \\
k_2 \arrow[r] & \tau(k_2) &
\end{tikzcd}$$

次の予想はσの像がG_2においてopenという仮定の下では，準同型は上の例の場合に限ることを主張する。

予想. $\sigma: G_1\to G_2$を連続準同型で像がG_2においてopenなものとすると，体の中への同型$\tau:\Omega_2\to\Omega_1$が一意に定まって$\tau\cdot\sigma(g_1)=g_1\tau$が任意の$g_1\in G_1$に対して成立つ。

この予想は次の意味でも定理の拡張になっている。k_1及びk_2を有限次代数体とし，Λ_1をk_1の必ずしもsolvably closedでないGalois拡大，Ω_2をk_2のsolvably closedな

Galois 拡大とする。 $H_1 = G(\Lambda_1/k_1)$, $G_2 = G(\Omega_2/k_2)$ をそれぞれの Galois 群とし，位相群の同型 $\sigma: H_1 \to G_2$ が存在するとき，上の予想が正しければ，体の中への同型写像 $\tau: \Omega_2 \to \Lambda_1$ が一意に定まって $\Lambda_1 = k_1 \cdot \tau(\Omega_2)$ となる。 なぜなら Λ_1 を含む k_1 の solvably closed Galois 拡大 Ω_1 をとり，$G_1 = G(\Omega_1/k_1)$ とすると，上の同型写像は G_1 から G_2 の上への準同型を induce し kernel に対応する体が Λ_1 だからである。

以下において，上の予想に関連して得られた結果及びその証明の方針を述べる。 詳細は[2]参照。

以下，k_1, k_2, Ω_1, Ω_2, G_1, G_2 は上に述べたものとし，σ は予想の条件をみたす準同型とする。 ただし定理2及びその系においては仮定が弱められる。

1. 最初に準同型 σ によって local な対応がどの位うまく行くかを見る。 $\mathfrak{p}_1$ を k_1 の有限素因子とし，$G_{\mathfrak{p}_1}$ を G_1 における $\mathfrak{p}_1$ の分解群とする。 もし $\sigma(G_{\mathfrak{p}_1}) \neq (e)$ であり，$\sigma(G_{\mathfrak{p}_1})$ が k_2 のある有限素因子 $\mathfrak{p}_2$ の分解群に含まれるならば，$\mathfrak{p}_2$ は $\mathfrak{p}_1$ によって一意に定まる。 この対応を ϕ と表わす。 ϕ がどのくらい多くの $\mathfrak{p}_1$ に対して定義されるか

はまだわからないが，k_2の殆んどすべての素因子がϕの像になることは以下のようにしてわかる。

素数lを固定し，$\mathfrak{p}_1$はlの上にないとすると，$G_{\mathfrak{p}_1}$のl-Sylow群$G_{\mathfrak{p}_1,l}$は簡単な構造をもつから，その準同型像をすべて書き上げることは容易で，$\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,l})$のコホモロジー次元によって分類すると

i) $\mathrm{cd}\,\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,l})\leq 1$ のとき。 Λ_1をσの kernel に対応するΩ_1の部分体とすると，Λ_1/k_1において$\mathfrak{p}_1$の分岐指数はlで割り切れない。

ii) $\mathrm{cd}\,\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,l})=2$ のとき。 ϕが$\mathfrak{p}_1$において定義される。 $\mathfrak{p}_2=\phi(\mathfrak{p}_1)$とおく。 E_2/k_2をΩ_2に含まれる有限次 Galois 拡大とし，E_1/k_1をσによって対応する拡大とする。 E_2/k_2における$\mathfrak{p}_2$の分岐指数がlで割り切れなければ，E_1/k_1において$\mathfrak{p}_1$の分岐指数はlで割り切れない。

iii) $\mathrm{cd}\,\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,l})=\infty$ のとき。 このとき$l=2$であり，k_2は総虚ではなく，$\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,2})$は2次巡回群である。

Proposition 1. k_2の殆んどすべての素因子がϕの像になる。 もっと詳しく，有限個を除いてk_2の各有限素因子$\mathfrak{p}_2$はk_1の有限素因子$\mathfrak{p}_1$で $\mathrm{cd}\,\sigma(G_{\mathfrak{p}_1,l})=2$となるものの像になる。

証明. k_2 を有限次拡大でおきかえて示してよいから, k_2 は1の l 乗根を含み総虚としてよい。 このとき上の iii) は起らない。 ϕ の像にならない k_2 の素因子が無限に存在すれば, そのような素因子のみが分岐する k_2 の無限次 $(l,l,\cdots)$ 型アーベル拡大が存在する。 その拡大に σ によって対応する k_1 の無限次アーベル $(l,l,\cdots)$ 拡大において, 上の i) 及び ii) の議論から l の素因子以外は不分岐となり矛盾。

2. k を有限次代数体とする。 Z_p を p 進整数加群とする。 k が Z_p-rank s をもつとは, k の Z_p^s-拡大が存在して Z_p^{s+1}-拡大は存在しないことをいう。 $s \geq r_2+1$ が知られており, Leopoldt 予想は等号になることを主張する。 F_2 を $\sigma(G_1)$ に対応する k_2 の有限次拡大とし, E_2 を総虚な F_2 の2次拡大とする。 E_1 を E_2 に対応する体とすると, $G(\Omega_2/E_2)$ は $G(\Omega_1/E_1)$ の準同型像だから, 上のことから E_1 の Z_p-rank は $[F_2:Q]+1$ 以上である。 E_1 においてある素数 p に対する Leopoldt 予想が正しければ, 従って $[k_1:Q] \geq [F_2:Q]$ となる。

特に $k_1=Q$ のときには, σ が surjective で $k_2=Q$ となる。 Q が唯一つの Z_2-拡大をもつことから, 上の iii) は起こらないことがわかり, また1の 2^m 乗根の体 $(m \geq 3)$ は σ によって自分自身に対応することがわかる。 そのような体の Z_p-

rank を考えることにより，$k_1=Q$ のときには ϕ がすべての奇素数で定義され恒等写像になることがわかる。

定理1. $k_1=Q$ のときには予想は正しい。

証明. L_2/Q を Ω_2 に含まれる有限次 Galois 拡大とし，L_1 を σ によって対応する $k_1=Q$ の Galois 拡大とする。L_2 で完全分解する奇素数に対し ϕ が定義されることから，そのような素数は L_1 でも完全分解し $L_1 \subset L_2$ となる。次数を考えて $L_1=L_2$ がいえ，σ の kernel に対応する体 $\Lambda_1=\Omega_2$ となる。従って σ は G_2 の自己同型から induce され，最初に述べた定理から同型

$$\tau : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_2 = \Lambda_1 \subset \Omega_1$$

が一意に対応して $\tau \cdot \sigma(g_1) = g_1 \tau$ が任意の $g_1 \in G_1$ に対して成立する。

系. Ω を Q の solvably closed Galois 拡大，Λ を Q の Galois 拡大とし，$G(\Omega/Q) \cong G(\Lambda/Q)$ とすると $\Omega=\Lambda$ である。

3. ここでは τ が存在したとき一意性を示す。Ω_1 及び Ω_2 を有限次代数体の solvably closed Galois 拡大とする。

補題. Ω_1 が Ω_2 に含まれなければ，$\Omega_1\Omega_2$ は Ω_2 上無限次である。

系. 有限次代数体 E が存在して $E\Omega_1 = E\Omega_2$ となるならば $\Omega_1 = \Omega_2$ である。

Proposition 2. 予想における τ は存在すれば一意である。

証明. 予想に述べた条件をみたす2つの *injections* τ, ρ が存在すれば，σ の *kernel* に対応する体を考えて $k_1\cdot\tau(\Omega_2) = k_1\cdot\rho(\Omega_2)$ となり，上の系から $\tau(\Omega_2) = \rho(\Omega_2)$ を得る。そのとき $\rho\cdot\tau^{-1}$ は $\tau(\Omega_2)$ の自己同型で，$\tau(\Omega_2)/k_1\cap\tau(\Omega_2)$ の Galois群と可換になるから恒等写像であり $\rho = \tau$ を得る。

4. 最後に σ が *local* によい性質をもっていれば予想が正しいことを示す。

定理2. 連続準同型 $\sigma: G_1 \to G_2$ によって ϕ が至る所定義される，即ち k_1 の各 *finite prime* $\mathfrak{p}_1$ に対し分解群 $G_{\mathfrak{p}_1}$ の σ による像が *non-trivial* で $\sigma(G_{\mathfrak{p}_1}) \subset G_{\mathfrak{p}_2}$ となる k_2 の *finite prime* $\mathfrak{p}_2$ が存在するとする。さらに各 $\sigma(G_{\mathfrak{p}_1})$ は

$G_{\mathfrak{P}_2}$の中でopenとする。そのとき$\sigma(G_1)$はG_2の中でopenであり，injection $\tau:\Omega_2\to\Omega_1$が一意に定まって，任意の$g_1\in G_1$に対して$\tau\cdot\sigma(g_1)=g_1\cdot\tau$となる。

証明．上のように対応する素因子に対して$N\mathfrak{P}_1\geq N\mathfrak{P}_2$が成立つことと，この場合にも$\phi$の像が$k_2$の殆んどすべての素因子を含むことから，$\sigma(G_1)$に対応する体の次数は$k_1$の次数を越えないことがわかり，特に$\sigma(G_1)$は$G_2$の中でopenである。$\tau$の存在については[1]の方法を少し手直しするだけでよい。

系．k_1及びk_2を代数体としk_1は有限次とする。Ω_1及びΩ_2をそれぞれk_1及びk_2のsolvably closedなGalois拡大とする。それらのGalois群$G(\Omega_1/k_1)$及び$G(\Omega_2/k_2)$が同型ならばk_2も有限次である。

証明．Galois群が同型の場合にはNeukirchによって，分解群の間の1：1対応が存在することが知られている。F_2をk_2に含まれる有限次代数体とし，L_2をΩ_2に含まれるF_2の最大Galois拡大とするとL_2はsolvably closedで，準同型$\rho:G(\Omega_1/k_1)\to G(L_2/F_2)$がinduceされる。

L_2 が solvably closed なことから，ρ は分解群の injection を与え，定理2の仮定をみたす。　そのとき $[F_2:\mathbb{Q}] \leq [k_1:\mathbb{Q}]$ となり，F_2 は任意だから $[k_2:\mathbb{Q}] \leq [k_1:\mathbb{Q}]$ となる。

文　献

[1] K. Uchida, Isomorphisms of Galois groups of solvably closed Galois extensions, Tôhoku Math. J., 31 (1979)

[2] K. Uchida, Homomorphisms of Galois groups of solvably closed Galois extensions, submitted to J. Math. Soc. Japan