数理解析研究所講究録
第 378 巻 1980 年 88-96

A note on modular forms mod p

名大 理　小池正夫

標数 p の保型形式は Serre と Swinnerton-Dyer によって Ramanujan の τ-関数についての合同式：全ての素数 l について $\tau(l) \equiv 1 + l^{11} \pmod{691}$ の解釈から cusp form に付随する l 進表現によるガロア群の像の決定のための道具として研究がはじめられた。しかし cusp form の空間に作用している Hecke 作用素の固有値を調べることは非常にむずかしく手がつけられないが mod p して考えるとそこには以外な規則性、かくれた性質がみつかるという面がある。

最近 cusp form と Eisenstein series との間の合同式、cusp forms の間の合同式など、保型形式の理論から代数的整数論、特に円分体の整数論への直接の応用、例えば円分体上の不分岐 p-アーベル拡大が cusp form に付随するアーベル多様体の等分点の座標で生成される体で構成されるという Ribet の仕事とか、土井―肥田による irregularity の概念の

拡張など．興味ある結果も mod p の保型形式の理論がつかわれている。ここでは標数 p の保型形式の空間についてのいくつかの結果、予想についてかきたいと思います。

$N \geq 1$ 整数，$k \geq 2$ 整数，$\psi =$ mod N の Dirichlet 指標で $\psi(-1) = (-1)^k$ をみたす。

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$S_k(N,\psi) = \Gamma_0(N)$ 上 type (k,ψ) の cusp form のなす空間

とくに $\psi =$ principal char. のときは $S_k(N)$ とかく。

以下 p は 5 以上の素数ときめておく。最初に $S_k(1)$ に対応する標数 p の cusp form の空間を定義する。

$$S_k(1) \supset V_{k,\mathbb{Z}} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \;\middle|\; \underset{\forall n \geq 1}{a_n \in \mathbb{Q}},\ p \text{ 進整数} \right\}$$

ここで $q = e^{2\pi i z}$ とする．$V_{k,\mathbb{Z}}$ の各元 f に対して

$$\tilde{f} \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n q^n \in \mathbb{F}_p[[q]], \quad \bar{a}_n = a_n \bmod p$$

という有限体を係数とする形式的ベキ級数 $\tilde{f}$ を対応させる．そして

$$\widetilde{S_k(1)} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \tilde{f} \;\middle|\; \forall f \in V_{k,\mathbb{Z}} \right\}$$

とおくと、これは $\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間として $\dim_{\mathbb{C}} S_k(1)$ がその次元になる。$\widetilde{S_k(1)}$ を $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する weight k の cusp forms mod p の空間という。これが Serre 達が

最初に定義した形だが、実際は係数拡大して考えるのが、Hecke 作用素の同時固有関数を考えたり、level がある場合の標数 p の保型形式を考えるには必要になってくるから、$\widetilde{S_k(1)}$ を適当に係数拡大したものも、簡単のために同じ記号をつかってかくことにする。weight $p-1$ の Eisenstein 級数 $E_{p-1} = 1 - \frac{2(p-1)}{B_{p-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{p-2}(n) q^n$, ここで $\sigma_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^k$, B_{p-1} は $p-1$ 番目の Bernoulli 数とする。このとき、$2(p-1)/B_{p-1}$ は有理数で、しかも $\equiv 0 \pmod p$ をみたす。従って $V_{k,\mathbb{Z}}$ の元 f に対して $fE_{p-1} \in V_{k+p-1,\mathbb{Z}}$ で $\tilde{f} = (\widetilde{fE_{p-1}})$ となり、

$$(1) \qquad \widetilde{S_k(1)} \subset \widetilde{S_{k+p-1}(1)}$$

が成立つ。次に標数 p の Hecke 作用素を定義する。ℓ を素数として、次数 ℓ の Hecke 作用素 $T(\ell)$ は $S_k(1)$ の元 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ に $f|T(\ell) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{n\ell} + \ell^{k-1} a_{\frac{n}{\ell}} \right\} q^n$ ただし $\ell \nmid n$ ならば $a_{\frac{n}{\ell}} = 0$、で作用する。従って $T(\ell)$ は $V_{k,\mathbb{Z}}$ の上に作用し、故に $\widetilde{S_k(1)}$ 上の作用素 $\widetilde{T}(\ell)$ がひきおこされる。一般の正の整数 n に対しては、$T(n)$ は $T(\ell)$ 達の積の和として、かけるから同じ式で $\widetilde{T}(n)$ を定義する。$\widetilde{T}(n)$ 達を標数 p の Hecke 作用素という。明らかに次の式

が成立つ。

(2) $\quad tr\, T(n) \bmod p = tr\, \tilde{T}(n)$

注意しておくことは $T(n)$ の作用は f が $S_k(1)$ の元か $S_{k+p-1}(1)$ の元かで異なっているが $\tilde{T}(n)$ の作用は $\tilde{f}$ が $\widetilde{S_k(1)}$ と $\widetilde{S_{k+p-1}(1)}$ の両方に属していれば、同じ作用である、なぜなら l が p と素なら $l^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ が成立つから。

標数 p の保型形式を調べる有効な手段は Eichler に始まり土方先生により完成された Hecke 作用素の跡を具体的に与える式で、それは reduction mod p してとりあつかうのにきわめて都合よくできている。すなわち k', k が $k' \equiv k \bmod (p-1)$ のとき $tr\, T_k(p)$ と $tr\, T_{k'}(p)$ の間に合同式がなりたつ。 Hecke 多項式 $H_k(X) = \det(I - T_k(p)X + p^{k-1}I X^2)$，ここで I は $S_k(1)$ 上の単位作用素，について次の定理が成りたつ。

<u>定理</u> $k' > k$ が $k \geq 2\alpha+2$ か $k' \equiv k \bmod p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$ をみたす時 次の合同式が成りたつ。

$$H_{k'}(X) \equiv H_k(X) \mod p^{\alpha}\mathbb{Z}[X]$$

標数 p の保型形式に関する Serre の1つの結果として、χ を mod p の Dirichlet 指標とするとき、$S_k(p, \chi)$ に対して

ある k' が存在して

(3) $$\widetilde{S_k(p,\chi)} \subset \widetilde{S_{k'}(1)}$$

が成りたつ。この2つの空間の間の関係を調べることが問題ですが、この時にも跡公式が重要な役割をはたす：

N を $(p,N)=1$ なる正の整数とする。ψ と χ を各々 mod N, mod p の Dirichlet 指標とし、$\psi\chi(-1)=1$ をみたすとする。χ の order を t とすれば t は $p-1$ の約数で、整数 a で $1\le a\le t$, $(a,t)=1$ をみたすものに $\kappa=(p-1)(t-a)/t$ とおく。k を正の偶数とする時、cusp form の空間の次元の間に次の等式がなりたつ。

<u>定理</u>

$$\dim S_k(Np,\psi\chi) = \dim S_{\frac{k}{2}(p+1)-\kappa}(N,\psi) + \dim S_{\frac{k}{2}(p+1)-(p-1-\kappa)}(N,\psi).$$

特別な場合、$N=1$, $\psi=$ principal, $\chi=$ principal, $k=2$ のときは Serre の結果で

(4) $$\dim S_2(p) = \dim S_{p+1}(1)$$

である。Serre はこのことを用いて

(5) $$\widetilde{S_2(p)} = \widetilde{S_{p+1}(1)}$$

を証明している。我々の次元公式も、このような標数 p の保型形式の空間についての性質にいいかえられることを示す。

記号の説明をする. N, ψ, k は固定してよい. 適当な $\mathbb{Q}$ 上有限次拡大体 K で次の性質をみたすものを1つとっておく.

(i) K は全ての $\bmod p$ の Dirichlet 指標 χ について $S_k(Np, \psi\chi)$ に作用している全ての Hecke 作用素の固有値を含む。

(ii) K は全ての整数 $k' \leq \frac{k}{2}(p+1)$ について $S_{k'}(N, \psi)$ に作用している全ての Hecke 作用素の固有値を含む。

(iii) K は 1 の $p(p-1)$ 乗根を全て含む。

K の素因子 $\mathfrak{P}$ で p の上にあるものを1つ固定し. v を $\mathfrak{P}$ に付随する付値とし $\mathcal{O} = \{ \alpha \in K \mid v(\alpha) \leq 1 \}$. $F = \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ とする. $\bmod p$ の Dirichlet 指標 χ に対して

$$V_\chi = \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(Np, \psi\chi) \;\middle|\; a_n \in K \quad {}^\forall n \geq 1 \right\}$$

$$V_{k'} = \left\{ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \in S_{k'}(N, \psi) \;\middle|\; b_n \in K \quad {}^\forall n \geq 1 \right\}$$

ここで $q = e^{2\pi i z}$ とおく。$V_\chi, V_{k'}$ は K のとり方より K 上のベクトル空間でその次元は複素数体上の $S_k(Np, \psi\chi)$, $S_{k'}(N, \psi)$ の次元と等しい。上のベクトル空間の任意の部分空間 V に対して

$$V(\mathcal{O}) = \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in V \;\middle|\; a_n \in \mathcal{O} \quad {}^\forall n \geq 1 \right\}$$

とする. $V(\mathcal{O})$ の各元 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ に対して $\tilde{f} \in F[[q]]$ を

$$\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n q^n$$

$\bar{a}_n = a_n \bmod \mathfrak{P} \in F$ で定義する. $\tilde{f}$ は標数 p の保型形

式のより一般的な定義である. $\tilde{V} = \{ \tilde{f} \mid f \in V(\theta) \}$ とおけば $\tilde{V}$ は F 上のベクトル空間で その次元は V の K 上の次元と等しい。 さて $W_p = \begin{pmatrix} px, & 1 \\ pNy, & p \end{pmatrix}$, x, y は整数で行列式 p の行列とする. V_χ の元 $f(z)$ に対して

$$(f \mid W_p)(z) = p^{\frac{k}{2}} (pNyz + p)^{-k} f\left(\frac{pxz+1}{pNyz+p} \right)$$

と定義すると, W_p は V_χ と $V_{\bar{\chi}}$ の間の同型写像を与えることが知られている. ここで $\bar{\chi}(n) = \chi(n)$ の複素共役 で定義される $\bmod p$ の Dirichlet 指標を $\bar{\chi}$ とかく。

我々は K の素因子 $\mathfrak{p}$ を固定しているから, $\bmod p$ の Dirichlet 指標 ω で $\omega(a) \equiv a \bmod \mathfrak{p}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ をみたすものがただ1つ定まる. そして χ の位数が t だから整数 a で $1 \leq a \leq t$, $(a, t) = 1$ なるものがただ1つ定まって

$$\chi = \omega^{-\frac{(p-1)(t-a)}{t}} \qquad \kappa = \frac{(p-1)(t-a)}{t}$$

が成りたつ。 このように記号を定めておくと, 次の定理が Serre の結果の拡張になる。

<u>定理.</u> V_χ はその部分空間 $V_{1,\chi}$ と $V_{2,\chi}$ で次の性質をみたすものの直和でかける.

(i) $\dim_K V_{1,\chi} = \dim_{\mathbb{C}} S_{\frac{k}{2}(p+1)-(p-1-\kappa)}(N, \Psi)$

(ii) $\dim_K V_{2,\chi} = \dim_{\mathbb{C}} S_{\frac{k}{2}(p+1)-\kappa}(N, \Psi)$

(iii) $\widetilde{V_{1,\chi}} = \widetilde{V_{\frac{k}{2}(p+1)-(p-1-\kappa)}}$

(iv) $\left(\widetilde{V_{2,\chi}|W_p}\right) = \widetilde{V_{\frac{k}{2}(p+1)-\kappa}}$

この定理の応用として、$k=2$ のとき $k' \lneq p+1$ に対して $S_{k'}(N,\psi)$ の元 $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$, $b_1=1$ が Hecke 作用素の同時固有関数とすると、適当な mod p の Dirichlet 指標 χ で $S_2(Np,\psi\chi)$ の元 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $a_1=1$ で Hecke 作用素の同時固有関数になっているものが存在して

$$a_n \equiv b_n \pmod{\mathfrak{p}} \qquad \forall n \geq 1$$

が成立つ。$f(z)$ に対しては アーベル多様体を付随させることができて p 分点の体が b_n の情報をつかって調べられる。

最後に 予想というか問題をひとつ。

χ を mod p の Dirichlet 指標とする。κ を今までどおり定め、N を p と素な正の整数とする。跡公式を使うと次の次元の間の等式の成立がいえる:

$$\dim S_{p+1+\kappa}(N,\psi) = \dim S_2(Np,\psi\chi) + \dim G_\kappa(N,\psi)$$

ここで $G_\kappa(N,\psi)$ とかいたのは cusp form $S_\kappa(N,\psi)$ に更に Eisenstein series の空間を加えた空間をあらわす。

問題　この等式は標数pの保型形式の空間の性質にいいかえることができるか.

References

[H] H. Hijikata: Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, J. Math. Soc. Japan, 26, 56-82(1974).

[K] M. Koike: On p-adic properties of the Eichler-Selberg trace formula II, Nagoya Math. J., 64, 87-96(1976).

M. Koike: A note on modular forms mod p, Proc. Japan Acad., 55, Ser. A, No. 8, 313-315(1979).

[S] J.-P. Serre: Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular functions of one variable III, Proc. Intern. Summer School, Univ. Antwerp, 1972, Springer Lecture notes in Math. No. 350, 191-268.