数理解析研究所講究録
第378巻 1980年 112-122

微分体の整数論

モントリオール大　高橋秀一
宮城教育大　国吉秀夫

K： (常)微分体　すなわち，線形写像

$$\partial : K \to K, \qquad \partial(ab) = \partial a\cdot b + a\cdot \partial b$$

をもつ(可換)体，標数 0 とする。(記号：$\partial a = a'$)

K_c：　$=\{a \in K \mid \partial a = 0\}$　その定数体

(以下，K_c は閉体と仮定する。)

このとき universal な微分体 $\widetilde{K}$ とその定数体 $\widetilde{K}_c$ が存在して，拡大は $\widetilde{K}$ の中で考える。

(記号：$K\langle\eta\rangle$ 微分体として $\eta \in \widetilde{K}$ を K に添加したもの)

Kolchin の方法

G：　連結代数群で K_c 上定義されたもの

$\mathcal{L}(G)$：　その Lie 代数

V：　G 上の principal homogeneous K-space ($V_{\widetilde{K}} \neq \phi$, $\widetilde{K}$ 代数閉体)

とすれば，$\mathcal{V}$ に対しても Lie 代数 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ が K 上定義され，

$\eta \in \mathcal{V}$ に対して　$\lambda_\eta : G \longrightarrow \mathcal{V}$，　$x \longmapsto \eta x$　とすれば

$$\lambda_{\eta *} : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$$

さらに，<u>対数微分</u>

$$l\partial : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}), \qquad l\partial(\eta) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})_{K<\eta>}$$

が　i)　$l\partial(\eta x) = l\partial(\eta) + \lambda_{\eta *}(l\partial x)$，$x \in G$, $\eta \in \mathcal{V}$

ii)　K 上の同形写像　$\sigma : K<\eta> \longrightarrow \widetilde{K}$　に対し

$$l\partial(\sigma\eta) = \sigma l\partial(\eta)$$

iii)　$\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{V}$　に対し

$$l\partial(\eta_1) = l\partial(\eta_2) \Longleftrightarrow x = \eta_1^{-1}\eta_2 \in G_{\widetilde{K}_c}$$

（これは $\eta_1 x = \eta_2$ となる $x \in G$）

となるように定義できる。

<u>例</u>　$\mathcal{V} = G \subset GL(n)$　のとき

$$l\partial(\eta) = \eta' \eta^{-1} = a \in \mathcal{L}(G)_K$$

となる η をとれば，K 上の iso. σ に対し

$$\eta^{-1}\sigma\eta = c(\sigma) \in G_{\widetilde{K}_c}$$

<u>Galois 拡大</u>（strongly normal）L/K :

L/K　finitely generated で，

任意の K 上の iso. $\sigma : L \longrightarrow \sigma L < \widetilde{K}$　に対し

$$\sigma L < L \cdot \widetilde{K}_c, \qquad L < \sigma L \cdot \widetilde{K}_c$$

となるものとする。

そのとき，σ は $L\widetilde{K}_c/K\widetilde{K}_c$ の automorphism に一意に延長され，σ 全体の集合は $L\widetilde{K}_c/K\widetilde{K}_c$ の automorphism group と同一視できる。これを L/K の Galois 群といい，$Gal(L/K)$ と記す。

例 1)　$L=K\langle\eta\rangle$　η は $y'=a\,(\in K)$ の解，$\eta\notin K$

このとき，$Gal(L/K)\simeq \mathbb{G}_a$

2)　$L=K\langle\eta\rangle$　η は $y'=ay\ (a\in K)$ の解.

η　K 上超越，$L_c=K_c$

このとき，$Gal(L/K)\simeq\mathbb{G}_m$

3)　Picard-Vessiot 拡大　$L=K\langle\eta_1,\cdots,\eta_n\rangle$

$\eta_1,\cdots,\eta_n$　は　$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$，$a_i\in K$ の基本解で，$L_c=K_c$

このとき，$\sigma\in Gal(L/K)$ に対し

$$\sigma(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)C(\sigma),\quad C(\sigma)\in GL(n,\widetilde{K}_c)$$

となり，$Gal(L/K)\subset GL(n,\widetilde{K}_c)$

定理

a)　V を G 上の principal homogeneous K-space，$\eta\in V$ を K 上 generic で

$$l\partial\eta\in\mathcal{L}(V)_K$$

とする。もし，$L=K\langle\eta\rangle=K(V)$ の定数体 L_c が K_c と一致する（$L_c=K_c$）ならば

$K\langle\eta\rangle/K$ は galois 拡大で

$$\mathrm{Gal}(K\langle\eta\rangle/K) \rightrightarrows G_{\tilde{K}_c} \quad (K_c \text{ 同形})$$
$$\sigma \longmapsto c(\sigma) = \eta^{-1}\cdot\sigma\eta$$

b) 逆に L/K を galois 拡大で，K_c 同形

$$c:\ \mathrm{Gal}(L/K) \rightrightarrows G_{\tilde{K}_c}$$

が存在するとき，

G 上のある principal homogeneous K-space V と

K 上 generic な点 $\eta \in V_L$ で

$$l\partial(\eta) \in \mathcal{L}(V)_K$$

となるものが存在して

$$L = K\langle\eta\rangle = K(V)$$

かつ，すべての $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対して

$$\sigma\eta = \eta\, c(\sigma)$$

が成立する。

([2] Ch VI, §10, Th 9 ; a) については，このとき

trans. deg $K\langle\eta\rangle/K = \dim G$)

註) galois cohomology set $H^1(K,G)$ は G 上の principal homogeneous K-space の K-同形類の集合と 1 対 1 に対応する ([2] Ch V, §13) から，$H^1(K,G)=1$ ならば $V \simeq G$ で，上の定理は G のみ考えればよい。

$G = \mathbb{G}_a,\ \mathbb{G}_m,\ GL(n),\ SL(n)$ のときは $H^1(K,G)=1$ である。

Galois 理論（Kolchin-Lang [3]）

以上の線に沿えば，galois 拡大 L/K に関する Galois の基本定理は次の形になる。

$$
\begin{array}{ccccc}
L = K(V) & \longleftrightarrow & V & \longleftrightarrow & 1 \\
| & & | & & | \\
B = K(V/H) & \longleftrightarrow & V/H & \longleftrightarrow & H \\
| & & | & & | \\
K = K\langle 1 \rangle & \longleftrightarrow & 1 = V/G & \longleftrightarrow & G = \mathrm{Gal}(L/K)
\end{array}
$$

Ritt の方法

$U \supset V$ を複素球面 $\mathbb{C}$ 上の connected open set，$\mathfrak{M}$ を有理形関数の層とする。そのとき，U, V 上の有理形関数全体の集合をそれぞれ $K = \Gamma(U, \mathfrak{M})$，$L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$ とすれば

$$\mathrm{Res} : K = \Gamma(U, \mathfrak{M}) \hookrightarrow L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$$

により，L は K の微分拡大となる。（K, L において，$\partial = \frac{d}{dz}$）

例　$U = \mathbb{C}$，$V = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ とすれば

$$\log z \notin K = \Gamma(U, \mathfrak{M}), \quad \log z \in L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$$

で $\log z$ は $y' = \frac{1}{z}$ の解である。

Kummer 理論

K を微分体，$\tilde{K}$, K_c, $\tilde{K}_c$ は上述の通りとする。（K_c 標数 0，代数閉体）

L/K を galois 拡大で，$Gal(L/K)$ が連結線形可換とする。
そのとき，構造定理より，injective K_c-hom

$$Gal(L/K) \hookrightarrow (\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a)^N$$

が存在する。

$$G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$$

とおけば，$H^1(K, G) = \{1\}$．よって，G 上の principal homogeneous K-space は G と K-同形．また，このとき，

$$\mathcal{L}(G)_{\widetilde{K}} = \widetilde{K} \oplus \widetilde{K}$$

ここで，$\ell\partial : G_{\widetilde{K}} \to \mathcal{L}(G)_{\widetilde{K}}$ は

$$\ell\partial(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1' \alpha_1^{-1}, \alpha_2')$$

により定義され，$\alpha, \beta \in G$ に対し

$$\ell\partial(\alpha\beta) = \ell\partial(\alpha) + \ell\partial(\beta)$$

さて，

$$A(L/K) = \{a \in \mathcal{L}(G)_K \mid \exists \alpha \in G_L,\ \ell\partial\alpha = a\}$$
$$= \ell\partial(G_L) \cap \mathcal{L}(G)_K$$

とおくと，$\mathcal{L}(G)_K$ の部分加群の列

$$\mathcal{L}(G)_K \supset A(L/K) \supset \ell\partial(G_K)$$

をうる。ここで商(加)群

$$A(L/K)/\ell\partial(G_K) = \underline{A(L/K)}$$

を考える。以下，$a \in A(L/K)$ の代表する coset を $\underline{a}$ で表す。

$\underline{a} \in \underline{A(L/K)}$ と $\sigma \in Gal(L/K)$ に対し，$\alpha \in G_L$, $\wp\alpha = \underline{a}$ をとり

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = \alpha^{-1} \cdot \sigma(\alpha) \in G_{\widetilde{K}_c}$$

とすると，$\langle \underline{a}, \sigma \rangle$ は α のとり方によらない。そして，

$$\langle \underline{a} + \underline{b}, \sigma \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{b}, \sigma \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma\tau \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{a}, \tau \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \sigma \in Gal \iff \underline{a} = \underline{0}$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \underline{a} \in \underline{A} \iff \sigma = 1$$

よって，

$$\begin{array}{ccc} \underline{A(L/K)} \times Gal(L/K) & \longrightarrow & G_{\widetilde{K}_c} \\ \underline{a} \times \sigma & \longmapsto & \langle \underline{a}, \sigma \rangle \end{array}$$

は perfect pairing となる。

<u>定理</u>

a) $$\begin{array}{ccc} \underline{A(L/K)} & \longrightarrow & Hom_{K_c}(Gal(L/K), G_{\widetilde{K}_c}) \\ \underline{a} & \longmapsto & \langle \underline{a}, \ \rangle \end{array}$$

は iso. である。

（ここで，右側の群は $Gal(L/K)$ の character 群と考えられる。）

b) H を $Gal(L/K)$ の K_c 部分群とすれば

$$H^{\perp\perp} = H, \quad L_H = K_{H^\perp}$$

ここで，$\perp$ は上の pairing による直交集合を表し，

L_H は Galois 理論による H の不変体

$K_{H^\perp} = K\langle \alpha \mid \in L,\ \ell\partial\alpha = a,\ \underline{a} \in H^\perp \rangle$ を表す。

[証明]

1) $\langle \underline{a}, \ \rangle : Gal(L/K) \longrightarrow G_{\tilde{K}_c}$ は K_c-hom. である。

([2], Ch VI, Th 6 の証明と同様にして証明できる。)

2) $\underline{a} \longmapsto \langle \underline{a}, \ \rangle : \underline{A(L/K)} \longrightarrow Hom_{K_c}(Gal(L/K), G_{\tilde{K}_c})$

は全射である。

$f : Gal(L/K) \longrightarrow G_{\tilde{K}_c}$ を K_c-hom. とする。$G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$, $Gal(L/K) \simeq \mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_a^s$ だから，f は Gal. の直積因子 H_i ($\simeq \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_a$) から $\mathbb{G}_m$ 又は $\mathbb{G}_a$ への K_c-hom f_i の積に分解される。よって，各 f_i が $\underline{A(L/K)}$ の像に入ることを示す。

$H_i \simeq \mathbb{G}_m$ のとき，$Hom_{K_c}(H_i, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}$ だから，f_i が K_c 同形のときに示せばよい。

$H_i \simeq \mathbb{G}_a$ のとき，$f_i \neq 0$ ならば，f_i は K_c 同形

H_i の ($Gal(L/K)$ における) 直積余因子に対応する L/K の中間体を L_i とすれば，$Gal(L_i/K) \simeq H_i$ そして，

$$f_i : Gal(L_i/K) \longrightarrow (\mathbb{G}_m \text{ 又は } \mathbb{G}_a \subset) G$$

は injective K_c-hom.

$H^1(K, G) = 1$ であるから，[2] Ch VI, §9, Cor 1 より，

$\exists \alpha \in G_{L_i}$; $\ell\partial\alpha = a \in \mathcal{L}(G)_K$, $\sigma\alpha = \alpha f(\sigma)$ ($\sigma \in Gal(L_i/K)$)

$\therefore$ $f_i\langle \ \rangle = \langle \underline{a}, \ \rangle$

3) H を $Gal(L/K)$ の K_c 部分群とする。$H^{\perp\perp} \supset H$ は定義より明。

$\sigma \in Gal(L/K) - H$ をとり，f を K_c hom : $Gal(L/K) \longrightarrow G$ で，$\mathrm{Ker} f \supset H$, $f(\sigma) \neq 1$ となるものとすれば，2) より，$f(\ ) = \langle \underline{a}, \ \rangle$ となる $\underline{a} \in \underline{A}$ が存在．そのとき，$\underline{a} \in H^{\perp}$ ∴ $\sigma \notin H^{\perp\perp}$ ∴ $H^{\perp\perp} = H$.

$L_H = K_{H^{\perp}}$ はこれから直ちに出る． ▨

注1) 定理を図示すれば

$$
\begin{array}{ccccc}
L & \longleftrightarrow & \underline{A(L/K)} & \longleftrightarrow & 1 \\
| & & | & & | \\
L_H & \longleftrightarrow & \underline{B} = H^{\perp} & \longleftrightarrow & H \\
| & & | & & | \\
K & \longleftrightarrow & \underline{0} & \longleftrightarrow & Gal
\end{array}
$$

注2) $\underline{A}$ の $\underline{0}$ の近傍として

$$U(E,F) = \{ \underline{a} \in \underline{A} \mid \langle \underline{a}, \sigma \rangle \notin F,\ \sigma \in E \}$$

E は $Gal(L/K)$ の有限集合，F は $G_{\widetilde{K_c}}$ の有限集合で 1 を含まぬものとする。

E, F をこの条件をみたすもの全体を動かして，$U(E,F)$ により $\underline{A}$ に位相を入れる。b) において，K_c 部分群 H に対応する $\underline{B} = H^{\perp}$ は，この位相による $\underline{A}$ の閉部分群として characterize される。

註3) $y' = ay$, $a \in K$, の形の解(exponential)のみの拡大体については Rosenlicht[5].

附録 定数体について。

1) $L = K\langle y\rangle$, $y' = a \in K$ のとき $L_c = K_c$ ([1] p23)

2) $L = K\langle y\rangle$, $y' = ay$, $a \in K$ のとき,

$$A(L/K) = \{a \mid \in K,\ \exists \alpha \in L,\ \alpha'\alpha^{-1} = a\}$$

とおき, $A(L/K)/\ell\partial((\mathbb{G}_m)_K)$ に torsion part がなければ, $L_c = K_c$ が 1)と同様にして証明できる.

torsion part があれば, $L_c = K_c$ は必しも成立しない。

例 $K = K_c(X)$, K_c 閉体, $\partial = \frac{d}{dX}$ とする。このとき, $L = K\langle y\rangle$, $y' = \frac{1}{2X}y$ の形で $L_c \supsetneqq K_c$ となるものが作れる。実際,

$c \in \widetilde{K}_c - K_c$ をとり $y = \sqrt{cX}$ とおけば

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2X}$ 一方 $c = \frac{y^2}{X} \in K\langle y\rangle$, 定数

参考文献

[1] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957

[2] E. Kolchin, *Differential algebra and algebraic*

groups, Academic Press, New York, 1973

[3] E. Kolchin – S. Lang, Algebraic groups and the Galois theory of differential fields, Amer. J. Math. 80 (1958), 103–110

[4] J. F. Ritt, Differential algebra, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol 33, New York, 1950

[5] M. Rosenlicht, Differential extension fields of exponential type, Pacific J. Math. 57 (1975) 289–300