数理解析研究所講究録
第 379 巻 1980 年 1-15

集合値写像の写像度

東北大 理　上之郷高志

1. 序

n 次元ユークリッド空間 R^n の空でない compact sets の全体を $Comp(R^n)$, $A \subset R^n$ の ε-開近傍を $U_\varepsilon(A)$, 区間 $[0,1]$ を I で表わす。$f: I \times R^n \longrightarrow R^n$ は有界連続とする。常微分方程式

$$(E) \qquad dx/dt = f(t, x)$$

を考える。$a \in R^n$ に対して

$$(1) \qquad \phi(a) = \{ x(1) : x(t) \text{ は } (E) \text{ の解で } x(0) = a \}$$

とすれば，$\phi: R^n \rightarrow Comp(R^n)$ が得られる。

我々の目的は、この集合値写像 ϕ と，R^n の有界な開集合

Dと，適当な点 $p\in R^n$ に対して，写像度 $d(\phi, D, p)$ を定義することである。

位相空間Xから $Comp(R^n)$ への写像 ϕ が上半連続であるとは、任意の $x\in X$ と $\varepsilon>0$ に対して，x の近傍 W が存在して，$\phi(W)\subset U_\varepsilon(\phi(x))$ が成りたつときに言う。ただし $\phi(W)=\bigcup\{\phi(y): y\in W\}$ である。

集合値写像の写像度に関して，Hukuhara [4] や Cellina & Lasota [2] 等により次の結果が得られている。

$\phi: \overline{D}\to Comp(R^n)$ が上半連続で，任意の $x\in\overline{D}$ に対して $\phi(x)$ が convex ならば，$p\in R^n\setminus\phi(\partial D)$ に対して，写像度 $d(\phi, D, p)$ が定義できる。ただし $\overline{D}$ と ∂D はそれぞれ，Dの閉包と境界を表わす。

(1) で定義された ϕ は上半連続であることが Kamke の定理 (Theorem 3.2 in [3], p.p. 14-15) から確かめられるが，$\phi(x)$ は convex とは限らない。そこで微分方程式の特性をいかして (1) の ϕ に写像度を入れることを考えよう。(E) の右辺の f に対し，次の性質を持つ連続関数列 $\{f_k\}$ が存在する。

(i) $f_k: I\times R^n\to R^n$ は有界連続，

(ii) $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ 広義一様収束,

(iii) (E_k) $dx/dt = f_k(t, x)$ の初期値問題は一意的.

$a \in R^n$ に対し, $x(0) = a$ をみたす (E_k) の解は唯一つ存在する。それを $x_k(t)$ と書く。$\phi_k(a) = x_k(1)$ とすれば, 連続写像 $\phi_k : R^n \to R^n$ が得られる。この $\{\phi_k\}$ はある意味で ϕ を近似していると思われる。すなわち, Kamke の定理より, $\{\phi_k\}$ は次の性質を持っていることが分かる。

(I) $\{\phi_{k_j}\}$ を $\{\phi_k\}$ の部分列, $\{x_j\} \subset R^n$ を $x \in R^n$ に収束する点列とすると, $\{\phi_{k_j}(x_j)\}$ は $\phi(x)$ の点に収束する部分列を含む。

これは次と同値である。(cf. 補題 3)

(II) $\forall x \in R^n$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists W$: x の近傍, $\exists L > 0$

$$\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\phi(x)) \quad \text{for } k \geq L.$$

微分方程式論に写像度を応用するためには, (1) で得られた ϕ はもちろん, ϕ と連続写像との合成写像に対しても, 写像度を定義する必要があると思われる。幸いなことに, それ

らに対しても（I）をみたす連続写像の列が存在する（cf. 例2）。そこで次節以下では，(I)［従って（II)］をみたす連続写像の列 $\{\phi_k\}$ を使って，それらの写像度 $d(\phi_k, D, p)$ から ϕ の写像度 $d(\phi, D, p)$ を定義することを考えよう。

2. *regular mappings.*

M を *metric space* とする。M から R^n への連続写像の全体を $C(M, R^n)$ とかく。$\phi: M \to Comp(R^n)$ と $S \subset M$ に対し，$\phi(S)$ を $\phi(S) = \bigcup\{\phi(x) : x \in S\}$ で定義する。

定義． $\phi : M \to Comp(R^n)$ とする。次の性質（P）をみたす列 $\{\phi_k\} \subset C(M, R^n)$ が存在するとき，ϕ は *regular* であると言う。

(P) $\forall x \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists W$: x の近傍，$\exists L > 0$

$$\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\phi(x)) \quad \text{for } k \geq L.$$

$\{\phi_k\}$ を ϕ の近似列と呼び，それらの全体を $A(\phi)$ とかく。

上の定義から直ちに次の2つの補題が導かれる。

補題1. 近似列の部分列は近似列である。

補題2. $\phi : M \to Comp(R^n)$ が regular で, $\{\phi_k\} \in A(\phi)$ とする。このとき任意の $S \subset M$ に対して, $\phi|_S : S \to Comp(R^n)$ も regular で, $\{\phi_k|_S\} \in A(\phi|_S)$ である。

補題3. $\phi : M \to Comp(R^n)$, $\{\phi_k\} \subset C(M, R^n)$ とする。このとき次の2つは同値である。

(i) $\{\phi_{k_j}\}$ を $\{\phi_k\}$ の部分列, $\{x_j\} \subset M$ を $x \in M$ に収束する点列とすると, $\{\phi_{k_j}(x_j)\}$ は $\phi(x)$ の点に収束する部分列を含む。

(ii) $\{\phi_k\}$ は (P) をみたす。すなわち, ϕ は regular.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). もし (ii) が成りたたないとすると,
$\exists \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$, $\exists \{x_j\} \subset M$,
$\ni$ $x_j \to x$ $(j \to \infty)$, $\phi_{k_j}(x_j) \notin U_\varepsilon(\phi(x))$, $j = 1, 2, \cdots$.
これは (i) に矛盾。

(ii) $\Rightarrow$ (i). もし (i) の結論が成りたたないとすると, $\phi(x)$ は compact だから, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\phi_{k_j}(x_j) \notin U_\varepsilon(\phi(x))$ for $k \geqq N$。この ε と x に対する (P) の L と W を考える。j が十分大きければ, $k_j \geqq L$ かつ $x_j \in W$ である。これは

(P)に矛盾。　　　　q. e. d.

補題4.　$\phi: M \to Comp(R^n)$ を regular, $K \subset M$ を compact, $\{\phi_k\} \in A(\phi)$, $\varepsilon > 0$ とする。このとき番号 N が存在して, 次が成りたつ。 $\forall x \in K$, $\exists y \in K$,

(2)　$\phi_k(x) \in U_\varepsilon(\phi(y))$　for $k \geqq N$.

従って

(3)　$\phi_k(K) \subset U_\varepsilon(\phi(K))$　for $k \geqq N$。

証明. (P)より任意の $x \in K$ に対して, x の開近傍 W_x と番号 L_x が存在して, $\phi_k(W_x) \subset U_\varepsilon(\phi(x))$ for $k \geqq L_x$ が成りたつ。$\{W_x : x \in K\}$ は K の open covering で, K は compact だから, 有限個の点 $x_1, \cdots, x_m \in K$ が存在して, $\bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i} \supset K$ である。N として, $N = max\{L_{x_i} : i=1, \cdots, m\}$ とすればよい。　　　　q. e. d.

注意.　$g: M \to R^n$ が与えられたとき, $\hat{g}(x) = \{g(x)\}$ とすると, $\hat{g}: M \to Comp(R^n)$ が得られる。g が連続ならば, $\hat{g}$ は

regular である。何故なら，$\hat{g}$ の近似列 $\{\phi_k\}$ として，$\phi_k = g$ ($k = 1, 2, \cdots$) が取れるからである。逆に $\hat{g}$ が regular ならば g が連続であることが次のようにして示される。$\{\phi_k\}$ を $\hat{g}$ のひとつの近似列とする。先ず (P) から $\{\phi_k\}$ は g に各点収束していることが分かる。すなわち，任意の $y \in M$ に対して $\lim_{k\to\infty} \phi_k(y) = g(y)$ である。$x \in M$ と $\varepsilon > 0$ を任意に与える。(P) から，x の近傍 W と番号 L が存在して $\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\hat{g}(x))$ for $k \geqq L$ である。言いかえれば，任意の $y \in W$ に対して，$|\phi_k(y) - g(x)| < \varepsilon$ for $k \geqq L$ である。ここで $k \to \infty$ ならしめると $|g(y) - g(x)| \leqq \varepsilon$ を得る。すなわち g は x で連続である。

3. regular mappings の写像度とその性質.

D を R^n の有界な開集合，$\phi : \overline{D} \to Comp(R^n)$ は regular とする。$\phi(x)$ の convex hull を $\phi^*(x)$ とかく。p として，

$$(4) \qquad p \in R^n \setminus \overline{\phi^*(\partial D)}$$

なるものを取る。$\phi^*(\partial D)$ は，$\phi(\partial D)$ の convex hull ではないことに注意しよう。また ϕ が上半連続のときは，$\phi^* : \overline{D} \to Comp(R^n)$ も上半連続となり，従って $\phi^*(\partial D)$ は compact にな

る。よって (4) は $p \in R^n \setminus \phi^*(\partial D)$ とかける。

(4)をみたす点 p に対して，写像度 $d(\phi, D, p)$ を

$$(5) \qquad d(\phi, D, p) = \lim_{k \to \infty} d(\phi_k, D, p), \quad \{\phi_k\} \in A(\phi)$$

で定義したい。そのために，各 $\{\phi_k\}$ に対し，$\lim_{k \to \infty} d(\phi_k, D, p)$ が存在して，その値は $\{\phi_k\}$ の取り方によらないことを示そう。

$\{\phi_k\} \in A(\phi)$ をひとつ固定する。(4) より正の数 ε が存在して $dist(p, \overline{\phi^*(\partial D)}) \geqq 2\varepsilon$ が成りたつ。この ε と $\{\phi_k\}$ に対し，補題4で $M = \overline{D}$，$K = \partial D$ とおいて得られる番号 N をとる。(3) より $\phi_k(\partial D) \subset U_\varepsilon(\phi(\partial D))$，従って，$p \notin \phi_k(\partial D)$ が $k \geqq N$ で成りたつ。よって $d(\phi_k, D, p)$ は $k \geqq N$ に対して意味を持つ。次に $k \geqq N$ なる k を固定して，$H: I \times \overline{D} \to R^n$ を

$$H(t, x) = (1-t)\phi_k(x) + t\phi_N(x)$$

で定義する。(2) より任意の $x \in \partial D$ に対して，$y \in \partial D$ が存在して

$$\phi_k(x), \ \phi_N(x) \in U_\varepsilon(\phi^*(y))$$

が成りたつ。$U_\varepsilon(\phi^*(y))$ は convex だから，$H(I,x)\subset U_\varepsilon(\phi^*(y))$ である。よって $H(I,\partial D)\subset U_\varepsilon(\phi^*(\partial D))$ を得る。ε の決め方から $p\notin H(I,\partial D)$ が従い、$d(\phi_k,D,p)=d(\phi_N,D,p)$ が導かれる。すなわち，$\lim_{k\to\infty} d(\phi_k,D,p)$ が存在する。

もし $\{\phi_k\}$, $\{\psi_k\}$ が共に ϕ の近似列であれば，次の列

$$\phi_1,\ \psi_1,\ \phi_2,\ \psi_2,\ \cdots,\ \phi_k,\ \psi_k,\ \cdots$$

は (P) をみたすことが容易に分かる。すなわち，これも ϕ の近似列である。上の議論から，十分大きな番号 N_0 に対して，$d(\phi_k,D,p)=d(\psi_k,D,p)$ for $k\geqq N_0$ が成り立つ。以上のことから，$d(\phi,D,p)$ は (5) で定義できることが分った。以下、$d(\phi,D,p)$ の性質を調べよう。

定理１．　$d(\phi,D,p)\neq 0$ ならば，$p\in\phi(x)$ をみたす $x\in D$ が存在する。

証明．　(5)と補題1より，ある $\{\phi_k\}\in A(\phi)$ が存在して $d(\phi_k,D,p)=d(\phi,D,p)\neq 0$, $k=1,2,\cdots,$ が成りたつ。よって各 k に対して，$\phi_k(x_k)=p$ をみたす $x_k\in D$ が存在する。部分列を取ることにより $\{x_k\}$ は $\overline{D}$ のある点 x に収束するとしてよ

い。補題3より，$\{\phi_k(x_k)\}$は$\phi(x)$の点に収束する部分列を含んでいる。ところが$\phi_k(x_k)=p$だったから，$p\in\phi(x)$である。また(4)より$p\notin\phi(\partial D)$だから，$x\notin\partial D$，すなわち，$x\in D$である。　　　q. e. d.

$d(\phi, D, p)$の定義と，補題2と4から次の3つの定理は容易に導かれるであろう。

定理2.　Dが2つの交わらない開集合EとFの和で表わされていれば，

$$d(\phi, D, p)=d(\phi|_{\overline{E}}, E, p)+d(\phi|_{\overline{F}}, F, p).$$

定理3.　$X\subset\overline{D}$がcompactで，$p\notin\overline{\phi^*(X)}$ならば，

$$d(\phi, D, p)=d(\phi|_{\overline{D\setminus X}}, D\setminus X, p).$$

定理4.　任意の点$q\in R^n$に対して，

$$d(\phi, D, p)=d(\phi-q, D, p-q)$$

である。ただし写像 $\phi - q$ は $(\phi - q)(x) = \phi(x) - q = \{y - q : y \in \phi(x)\}$ で定義される。

注意、　定理4で $\phi - q : \overline{D} \to \mathrm{Comp}(R^n)$ は regular である。

次に regular mappings の homotopy を定義しよう。M を metric space とし、$\Phi : I \times M \to \mathrm{Comp}(R^n)$ を regular とする。このとき $\Phi(0, \cdot)$ と $\Phi(1, \cdot)$ は homotopic であると呼ぶ。補題2によれば、各 $t \in I$ に対して、$\Phi|_{\{t\} \times M}$ は regular，すなわち，$\Phi(t, \cdot) : M \to \mathrm{Comp}(R^n)$ は regular である。また、$\{\Phi_k\} \in A(\Phi)$ ならば，$\{\Phi_k(t, \cdot)\} \in A(\Phi(t, \cdot))$ である。

定理5.　$\Phi : I \times \overline{D} \to \mathrm{Comp}(R^n)$ は regular で、$p \in R^n \setminus \overline{\Phi^*(I, \partial D)}$ とする。このとき $d(\Phi(t, \cdot), D, p)$ は $t \in I$ に無関係に一定である。ただし，$\Phi^*(t, x)$ は $\Phi(t, x)$ の convex hull である。

証明.　$\mathrm{dist}(p, \overline{\Phi^*(I, \partial D)}) \geqq 2\varepsilon > 0$ をみたす ε を取り，$\{\Phi_k\} \in A(\Phi)$ とする。N を，補題4で，$M = I \times \overline{D}$, $K = I \times \partial D$ としたときに得られる番号とする。(3) より $p \notin \Phi_k(I, \partial D)$ for $k \geqq N$ を得る。$k \geqq N$ なる k をひとつ固定する。(2) よ

り、任意の $(t,x)\in I\times\partial D$ に対して、$(s,y)\in I\times\partial D$ が存在して

$$\Phi_k(t,x),\quad \Phi_N(t,x)\ \in U_\varepsilon(\Phi^*(s,y))$$

である。従って、各 $t\in I$ に対して，$\Phi_k(t,x)$ と $\Phi_N(t,x)$ を結ぶ線分は、convex set $U_\varepsilon(\Phi^*(s,y))$ に含まれる。このことから $d(\Phi_k(t,\cdot),D,p)=d(\Phi_N(t,\cdot),D,p)$ for $k\geqq N$ が従う。すなわち

$$d(\Phi(t,\cdot),D,p)=d(\Phi_N(t,\cdot),D,p)$$

である。一方 $p\notin\Phi_N(I,\partial D)$ だから，上式の右辺は $t\in I$ に無関係に一定である。　　　　q. e. d.

例1.　$(\tau,\xi)\in I\times R^n$ に対して

$$\Phi(\tau,\xi)=\{x(1):\ x(t)\text{は}(E)\text{の解で},\ x(\tau)=\xi\}$$

とすると，$\Phi:I\times R^n\to Comp(R^n)$ は regular であることが、補題3と Kamke の定理から分かる。特に $\Phi(1,\cdot)$ は恒等写像である。

例2.　M_1, M_2 を metric spaces，$g: M_1 \to M_2$ は連続，$\phi: M_2 \to Comp(R^n)$ は regular，$h: R^n \to R^m$ は連続とする。このとき，$h \circ \phi \circ g: M_1 \to Comp(R^m)$ は regular であって，$\{\phi_k\} \in A(\phi)$ に対し，$\{h \circ \phi_k \circ g\} \in A(h \circ \phi \circ g)$ である。

4. 補足

先に，$\phi: \overline{D} \to Comp(R^n)$ が上半連続で，すべての $x \in \overline{D}$ に対して $\phi(x)$ が convex ならば，ϕ に写像度が入ることを述べた（第一節）。このことと我々の結果との関連を少し述べよう。Cellina [1] は次のことを示した。

定理（Cellina）.　(M, ρ) を compact metric space，$\phi: M \to Comp(R^n)$ は上半連続で，すべての $x \in M$ に対し，$\phi(x)$ は convex とする。このとき $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \phi_\varepsilon \in C(M, R^n)$，$\forall x \in M$，$\exists y \in M$．$\rho(x, y) < \varepsilon$，$\phi_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(\phi(y))$.

$\varepsilon = 1/k$ としたときの ϕ_ε を ϕ_k と書けば，この定理は我々の補題4に相当する。Cellina & Lasota [2] はこの $\{\phi_k\}$ を使って，我々と同じ方法で ϕ に写像度を入れた。実はこの $\{\phi_k\}$ は，我々の意味で，ϕ の近似列になっている。すなわち $\{\phi_k\}$ は (P) をみたしている。以下そのことを示そう。

$\varepsilon > 0$ と $x \in M$ を任意に与える。ϕ の上半連続性から，正の数 δ が存在して

$$(6) \qquad \rho(x, z) < \delta \Rightarrow \phi(z) \subset U_{\varepsilon/2}(\phi(x))$$

が成りたつ。x の近傍 W として，$W = \{y \in M ; \rho(x, y) < \delta/2\}$，$L$ として，$L > \max\{2/\varepsilon, 2/\delta\}$ をみたすものをとる。このとき，$\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\phi(x))$ for $k \geqq L$ が成り立つ。何故なら任意の $y \in W$ と $k \geqq L$ に対して，定理から $z \in M$ が存在して，$\rho(y, z) < 1/k$，$\phi_k(y) \in U_{1/k}(\phi(z))$ である。L のとり方から $1/k < \varepsilon/2$ である。従って

$$(7) \qquad \phi_k(y) \in U_{\varepsilon/2}(\phi(z))$$

である。一方 $\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \delta/2 + 1/k < \delta$ だから (6) より $\phi(z) \subset U_{\varepsilon/2}(\phi(x))$ である。これと (7) から $\phi_k(y) \in U_\varepsilon(\phi(x))$ を得る。すなわち $\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\phi(x))$ for $k \geqq L$ が示せた。

Refernces

[1] A. Cellina, Approximation of set valued functions and fixed point theorems, Ann. Mat. Pura Appl., (4)82(1969), 17-24.

[2] A. Cellina and A. Lasota, A new approach to the definition of topological degree for multivalued mappings, Atti Accad. Naz. Lincei Lend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 47(1969), 434-440.

[3] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., 1964.

[4] M. Hukuhara, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac., 10(1967), 43-66.