数理解析研究所講究録
第 379 巻 1980 年 16-24

関数微分方程式の漸近的性質について

山梨大学 工学部 栗原光信

§0. 序

線型関数微分方程式

(0.1) $\dot{x}(t)=L(x_t)+F(t, x_t)$

と、対応する同次方程式

(0.2) $\dot{u}(t)=L(u_t)$

について考察する。ここで、$L(\phi)$ と $F(t,\phi)$ は連続関数の空間 $C=C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$ 上の線型汎関数($\mathbb{R}^n$ 値)である。$\omega\geqq 0$ は定数とする。また、$x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $(-\omega\leqq\theta\leqq 0)$ とおく。$t\to+\infty$ のとき汎関数 $F(t,\phi)$ がある意味で「小さく」なるとき、方程式(0.1)の解 $x(t)$ と方程式(0.2)の解 $u(t)$ がどのような漸近的な関係をもつかについて記述する。

$\omega=0$ の場合、方程式(0.1)と方程式(0.2)は線型常微分方程式系

(0.3) $\dot{x}(t)=[A_0+A(t)]x(t)$

と

(0.4) $\qquad \dot{u}(t) = A_0 u(t)$

となる。方程式(0.3)と(0.4)については、行列$A(t)$に関して次の3つの場合に分けて、各方程式の解$x(t)$と$u(t)$の漸近的な関係が論じられている。すなわち、

(0.5) $\qquad \|A(t)\| = o(1) \quad \text{as } t \to +\infty$ $\qquad$ (Order条件)

と

(0.6) $\qquad \int^{+\infty} \|A(t)\| dt < +\infty$ $\qquad$ (可積分条件)

と

(0.7) $\qquad A(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^{-k} \quad \text{as } t \to +\infty$ $\qquad$ (漸近展開)

の場合についてである。ただし、§0、§1においては、ベクトル$y = (y_k)$と行列$A = (a_{ij})$に対し、

$$\|y\| = \sum_{k=1}^{n} |y_k|, \quad \|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

とおく。このような考え方を、関数微分方程式(0.1)と(0.2)について拡張する試みを行うことにしよう。

§1. 常微分方程式の場合の結果

常微分方程式系(0.3)と(0.4)について、上記(0.5)〜(0.7)の各場合に関する結果をこの節で述べておこう。

定理1.1 (R. Bellman[1])

定数行列A_0の固有値$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$がすべて実根かつ単根とする。もし、条件(0.5)が成立するならば、各固有値λ_k

に対して、不等式

$$c_2 \exp\left\{\lambda_k t - d_2\int_{t_0}^{t}\|A(t)\|dt\right\}$$
$$\leqq \|x_k(t)\| \leqq c_1 \exp\left\{\lambda_k t + d_1\int_{t_0}^{t}\|A(t)\|dt\right\} \quad (t \geqq t_0)$$

従って、

$$\|x_k(t)\| = \exp[\lambda_k t + o(t)] \quad \text{as } t \to +\infty$$

をみたす方程式(0.3)の解$x_k(t)$が存在する。

定理 1.2 (N. Levinson[4])

定数行列A_0の固有値$\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_n$がすべて単根とする。もし、条件(0.6)が成立するならば、各固有値λ_kに対して、

$$x_k(t) = e^{\lambda_k t}[c_k + o(1)] \quad \text{as } t \to +\infty$$

をみたす解$x_k(t)$が存在する。

定理 1.3 (M. Hukuhara[3])

定数行列A_0の固有値$\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_n$がすべて単根とする。もし、条件(0.7)が成立するならば、各固有値λ_kに対して、

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{-m} \quad \text{as } t \to +\infty \quad (c_0 \neq 0)$$

を漸近展開としてもつ方程式(0.3)の解$x_k(t)$が存在する。ただし、上記定理において、c, d, μは定数とする。

§2. 記号と仮定

§1で述べた通り、$C = C([-\omega, 0], \mathbb{R}^n)$は有限閉区間$[-\omega, 0]$で連続な$\mathbb{R}^n$値関数の空間とし、$\mathbb{R}^n$は$n$次元複素列

ベクトル空間とする。$\omega \geqq 0$である。$\phi \in C$に対して、ノルム$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)|\,;\, -\omega \leqq \theta \leqq 0\}$を導入する。ただし、$|\cdot|$は$\mathbb{R}^n$上の任意のノルムとする。区間$[\sigma-\omega, \sigma+A]$ $(A \geqq 0)$で定義された関数$x(t)$に対し$x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(t \geqq \sigma,\ -\omega \leqq \theta \leqq 0)$と表記する。線型汎関数$L : C \to \mathbb{R}^n$は、

(2.1) $$L(\phi) = \int_{-\omega}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta)$$

と表わされる。ただし、$\eta(\theta)$は$[-\omega, 0]$で有界変動な行列値関数である。汎関数$F(t, \cdot) : C \to \mathbb{R}^n$は$t \geqq 0$で連続かつ$\phi \in C$について線型かつ

(2.2) $$|F(t, \phi)| \leqq \gamma(t)\|\phi\| \quad (t \geqq 0,\ \phi \in C)$$

をみたすとする。ただし、$\gamma(t)$は$t \geqq 0$で連続とする。また、変数λの方程式

(2.3) $$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-\omega}^{0} e^{\lambda\theta}[d\eta(\theta)].$$

を特性方程式、その根を特性根とよぶ。ただし、Iは単位行列を表わす。

§3. Order条件

常微分方程式(0.3)の場合のOrder条件(0.5)に相当する関数方程式(0.1)についての条件は、

(3.1) $$\gamma(t) = o(1) \quad \text{as } t \to +\infty$$

である。ただし、$\gamma(t)$は(2.2)で定義されている。この場合

次の定理が得られる。

定理3.1 (M. Kurihara [5])

Order条件(3.1)を仮定する。λを特性方程式(2.3)の単根の特性根とし、$\mathrm{Re}\lambda=\mu$とおく。さらに、実数部がμに等しい特性根がλ以外に存在しないとする。このとき、$\sigma\geqq 0$が存在して、方程式(0.1)が不等式

$$\beta_2\exp\left[\mu t-\alpha_2\int_\sigma^t\gamma(\tau)d\tau\right]$$
$$\leqq\|x_t\|\leqq\beta_1\exp\left[\mu t+\alpha_1\int_\sigma^t\gamma(\tau)d\tau\right]\quad(t\geqq\sigma)$$

従って、

$$\|x_t\|=\exp\left[\mu t+o(t)\right]\ \text{as}\ t\to+\infty$$

をみたす解$x(t)$を、区間$[\sigma-\omega,+\infty)$で有する。ただし、α_1, α_2, β_1, β_2は定数とする。

§4. 可積分条件

常微分方程式(0.3)の場合の可積分条件(0.6)に相当する、関数微分方程式(0.1)についての条件は、

(4.1) $$\int^{+\infty}\gamma(t)\,dt<+\infty$$

である。ただし、$\gamma(t)$は(2.2)で定義されている。この場合、J.K. Hale氏によって証明された次の定理を紹介しよう。

定理4.1 (J.K. Hale [2])

λを特性方程式(2.3)の単根の特性根とし、$\mathrm{Re}\lambda=\mu$とおく。

実数部がμに等しいすべての特性根が単根であるとする。さらに、次の(I)か又は(II)のいずれかの条件が成立すると仮定する。(I)可積分条件(4.1)をみたす。(II)任意の正数β，実数νとn次元行ベクトルηに対して、$t \geqq 0$で連続な関数$\gamma_2(t)$と定数kが存在して、任意の$t \geqq \sigma$で連続な関数$w(t)$で$\sup_{t \geqq \sigma}|w(t)| = 1$かつ$w(t) \to \varphi_\lambda(0) \times \mathrm{Const.}$ as $t \to +\infty$をみたすものに対し、以下の関係式が成立する。

$$\gamma_2(t) \to 0 \quad \text{as } t \to +\infty,$$

$$\int^{+\infty} \gamma(t)\gamma_2(t)\,dt < +\infty,$$

$$\int_t^{+\infty} \gamma(\tau) \exp\left[\beta(t-\tau) - \int_\tau^t \mathrm{Re}\,\delta(\zeta)\,d\zeta\right] d\tau \leqq \gamma_2(t) \quad (t \geqq 0),$$

$$\int_\sigma^{t} \gamma(\tau) \exp\left[-\beta(t-\tau) - \int_\tau^t \mathrm{Re}\,\delta(\zeta)\,d\zeta\right] d\tau \leqq \gamma_2(t) \quad (t \geqq \sigma \geqq 0),$$

$$\left|\int_t^{+\infty} \eta F(\tau, w_\tau) \exp\left[i\nu(t-\tau) - \int_\tau^t \delta(\zeta)\,d\zeta\right] d\tau\right| \leqq |\eta| k \gamma_2(t) \quad (t \geqq \sigma)。$$

このとき、$\sigma \geqq 0$と$a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$が存在して、方程式(0.1)は

$$x(t) = \exp\left[\lambda(t-\sigma) + \int_\sigma^t \delta(\zeta)\,d\zeta\right][a + o(1)] \quad \text{as } t \to +\infty$$

をみたす解$x(t)$を、区間$[\sigma-\omega, +\infty)$で有する。ただし、$\varphi_\lambda(\theta) = ce^{\lambda\theta}$ $(-\omega \leqq \theta \leqq 0)$は方程式(0.4)の解、従って$c$は$n$次元列ベクトルである。また、$d$はある$n$次元行ベクトルとして、$\psi_\lambda(\tau) = de^{-\lambda\tau}$ $(0 \leqq \tau \leqq \omega)$が方程式(0.4)，(2.1)に対すadjointな方程式

$$\dot{v}(\tau)=-\int_{-\omega}^{0} v(\tau-\theta)[d\eta(\theta)]$$

の解とする。さらに、

$$\alpha^{-1}=\psi_\lambda(0)\varphi_\lambda(0)-\int_{-\omega}^{0}\int_{0}^{\theta}\psi_\lambda(\xi-\theta)[d\eta(\theta)]\varphi_\lambda(\xi)d\xi$$

とおくとき、

$$\delta(t)=\alpha\, d F(t,\varphi_\lambda)$$

と定義する。

§5. 漸近展開

この節では、とくに $n=1$ の場合、すなわち方程式(0.1)と(0.2)がスカラーの場合を仮定する。常微分方程式(0.3)の場合の漸近展開の条件(0.7)に相当する、関数微分方程式(0.1)についての条件として、次の仮定をおく。すなわち、汎関数 $F(t,\phi)$ が、任意の $\phi\in C$ に対して $t\to+\infty$ のとき、漸近展開

(5.1) $$F(t,\phi)\sim\sum_{k=1}^{\infty}L_k(\phi)t^{-k}$$

が可能であるとする。ただし、$L_k(\phi)$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ は C 上の線型汎関数であるとする。これは、任意の整数 $N\geqq 0$ に対して実数 $\gamma_N\geqq 0$ と $\sigma_N\geqq 0$ が存在して、任意の $t\geqq\sigma_N$ と $\phi\in C$ に対して

$$\left|F(t,\phi)-\sum_{k=1}^{N}L_k(\phi)t^{-k}\right|\leqq\gamma_N t^{-(N+1)}\|\phi\|$$

が成立する事を意味している。このとき、次の定理を得る。

定理5.1 (M. Kurihara[6])

漸近展開の条件(5.1)を仮定する。λを特性方程式(2.3)の任意の単根の特性根とする。このとき、

(1) 方程式(0.1)は $e^{\lambda t} t^{r} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{-m}$ の形の形式解をもつ。ただし、c_0は任意に選べる。c_0によって、rとc_m ($m \geqq 1$)が定まる。

(2) $\mathrm{Re}\,\lambda = \mu$とおくと、実数部が$\mu$に等しいすべての特性根が単根であるならば、$\sigma \geqq 0$が存在して、方程式(0.1)は(1)の形式解を漸近展開としてもつような解$x(t)$を、区間$[\sigma-\omega, +\infty)$において有する。すなわち

$$x(t) \sim e^{\lambda t} t^{r} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{-m} \quad \text{as } t \to +\infty$$

をみたす。

参考文献

[1] R. Bellman; The boundedness of solutions of linear differential equations, Duke Math. J., Vol. 14, (1947), pp. 83–97.

[2] J. K. Hale; Linear asymptotically autonomous functional differential equations, Rend. Circ. Mat. Palermo, Vol. 5 (1966), pp. 331–351.

[3] M. Hukuhara ; Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires : Domain réel, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. 2 (1934), pp 13–88.

[4] N. Levinson ; The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. J., Vol. 15 (1948), pp. 111–126.

[5] M. Kurihara ; On an asymptotic behavior of solutions of linear functional differential equations, Funk. Ekv., Vol. 22 (1979), to appear.

[6] M. Kurihara ; Asymptotic expansions in scalar linear functional differential equations, Tokoku Math. J., Vol. 32 (1980), to appear.