数理解析研究所講究録
第 379 巻 1980 年 60-69

無限の遅れをもつ函数微分方程式における不変集合について

東北大 理　澤野 健介

1．序。　無限の遅れをもつ函数微分方程式とは，時刻 t における微係数の決定に，過去が影響を与え，しかも $t\to\infty$ となるに従い，影響を与える過去が有限の範囲にとどまらなくなるような方程式である。例えば，Volterra integro-differential equation

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, x(s))\,ds$$

などがある。但し，$\dot{x}(t) = dx/dt$，x，G，K は n 次元 Euclid 空間に値をとる函数である。無限の遅れをもつ函数微分方程式は，相空間の選び方によって色々の違いが生じてくる。そこで，相空間に幾つかの公理を設けて，抽象的に扱うことにする。そして，題目の問題を考える。

2．準備。　R^n で n 次元 Euclid 空間を表わす。B を $(-\infty, 0]$ を R^n に写す函数よりなる実線型空間で，あるセミノルム $|\cdot|$ が与えられているとする。同じ記号 $|\cdot|$ で R^n のノルムを表わし

ても、混乱しないであろう。 Bの要素φとψとが等しいとは、$\varphi(\theta)=\psi(\theta)$ が全ての $\theta\in(-\infty,0]$ で成立することである。このとき商空間 $B^{*}=B/|\cdot|$ は、そのセミノルムによって誘導されたノルムにより、ノルム線型空間となる。 任意の $\varphi\in B$ と任意の $\beta\geq 0$ に対し、φ^{β} で φ を $(-\infty,-\beta]$ に制限した函数を表わす。この様な函数φ^{β}の集合をB^{β}で表わし セミノルム$|\cdot|_{\beta}$を次の様に定義する。

$$|\eta|_{\beta}=\inf\{|\psi|;\ \psi\in B,\ \psi^{\beta}=\eta\},\quad \eta\in B^{\beta}.$$

任意の $\varphi\in B$に対し $|\varphi|_{\beta}=|\varphi^{\beta}|_{\beta}$ で定義すると、$|\cdot|_{\beta}$はBのセミノルムになる。 次に x を $(-\infty,\sigma)$ から R^{n} への写像とするとき、任意の $t\in(-\infty,\sigma)$ に対し x_t を $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-\infty<\theta\leq 0$, で定義する。

Dを$R\times B$の開集合、又 $f: D\to R^{n}$ をある連続函数とする。このときD上の函数微分方程式とは、次のような関係である；

(1) $\quad x'(t)=f(t,x_t)$。

ここで $x'(t)$ は $x(t)$の右側微分係数を表わす。 任意の $(\sigma,\varphi)\in D$に対し、$x:(-\infty,\sigma+A)\to R^{n}$, $A>0$, が (σ,φ)を通る(1)の解であるとは、$x_{\sigma}=\varphi$，かつ x が $[\sigma,\sigma+A)$ 上で連続的微分可能で(1)を満たすことである。 さて空間Bに次の様な公理を設ける.

(B1). $A>0$とし、$x:(-\infty,A)\to R^{n}$ を、x_0 がBに属し、$[0,A)$上で連続な函数とする。このとき任意の $t\in[0,A)$に対し，x_t はBに属し、またx_tはtについて連続になる。

(B2). ある連続函数$K(\beta)>0$が存在し

$$|\varphi| \leqq K(\beta) \sup_{-\beta\leqq\theta\leqq 0} |\varphi(\theta)| + |\varphi|_\beta$$

が全ての$\varphi\in B$と全ての$\beta\geqq 0$に対して成立する。

公理(B1),(B2)のもとで，任意の$(\sigma,\varphi)\in D$を通る(1)の解が存在する，Kaminogo[6]。$(\sigma,\varphi)\in D$に対し，$Q(\sigma,\varphi)$を次の様な組(T,x)の集合とする：$T>0$，xは(σ,φ)を通る(1)の解で，$(-\infty,\sigma+T)$で定義されている。次に$Q(\sigma,\varphi)$に以下のような順序$\leqq$を導入する：$Q(\sigma,\varphi)$の要素(T^1,x^1)，(T^2,x^2)に対し，$(T^1,x^1)\leqq(T^2,x^2)$とは，$T^1\leqq T^2$，かつx^2の$(-\infty,\sigma+T^1)$への制限がx^1に等しくなることとする。このとき，Zornの補題により，$Q(\sigma,\varphi)$に極大元(T,x)が存在する。そしてxは(σ,φ)を通る(1)の右極大延長解，又区間$(-\infty,\sigma+T)$は，xの右極大存在区間と呼ばれる。

補題1．(B1),(B2)を仮定する。任意の$\varphi\in B$と正数A，Lに対し，$F_A^L(\varphi)$を次の様な函数$u:(-\infty,A)\to R^n$の集合とする：$u_0=\varphi$かつ$|u(t)-u(s)|\leqq L|t-s|$，$t,s\in[0,A]$。このとき，集合$\Gamma=\{u_t;\ u\in F_A^L(\varphi),\ t\in[0,A]\}$は$B$でcompactである。

証明には，Hale and Kato[4]を参照のこと。但し[4]の相空間は我々のとは若干異なる。

Ωを$R\times R^n$の部分集合で，任意の$t\in R$に対し，切断$\Omega_t=\{y\in R^n;\ (t,y)\in\Omega\}$がnonemptyなるものとする。更に$\Omega_t$が次の様な連

続条件(C)を満たすものとする：

(C). 任意の $\varepsilon>0$ と任意の $t\in R$ に対し，ある $\delta=\delta(t,\varepsilon)>0$ が存在し，もし $|t-s|<\delta$ であれば

$$\inf\{r>0;\ U(\Omega_t,r)\supset\Omega_s \text{ かつ } U(\Omega_s,r)\supset\Omega_t\}<\varepsilon。$$

ここで $U(\Omega_t,r)$ は Ω_t の r近傍である。

<u>補題2</u>．もし，任意の $t\in R$ に対し，Ω_t が R^n の閉集合であり，条件(C)が満たされるならば，Ω は $R\times R^n$ の閉集合である。

証明は Sawano [10] を参照。以後 $y\in R^n$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, に対し，$|y|=(\sum_{i=1}^n y_i^2)^{1/2}$ とする。

<u>補題3</u>．任意の $t\in R$ に対し Ω_t が閉かつ凸，また条件(C)が満たされているとする。連続関数 $P(t):[\sigma,\infty)\to R^n$ に対し $d(P(t),\Omega_t)=\inf\{|P(t)-y|;\ y\in\Omega_t\}$ とすると，ある連続関数 $g(t)$ $:[\sigma,\infty)\to R^n$ で $g(t)\in\Omega_t$ かつ $d(P(t),\Omega_t)=|P(t)-g(t)|$ となるものが存在する。

証明は Sawano [10] を参照。

3．主な結果。　次の様な方程式

(2)　　$x'(t)=f(t,x_t)$

を考える。但し $f:R\times B\to R^n$ を連続とする。又(B1), (B2)は常に仮定されている。

<u>定理</u>．任意の $t\in R$ に対し，Ω_t が閉かつ凸で，更に条件(C)が満たされているとする。このとき次の2つの命題は同値

である：

(i) 任意の$\sigma\in R$と，$t\leqq\sigma$で$\varphi(t-\sigma)\in\Omega_t$となる任意の$\varphi\in B$に対し，$(\sigma,\varphi)$を通る(2)の解$x$で，右極大存在区間で定義されかつその間$(t,x(t))\in\Omega$を満たすものが少くとも1つ存在する。

(ii) 任意の$\sigma\in R$と，$t\leqq\sigma$で$\varphi(t-\sigma)\in\Omega_t$となる任意の$\varphi\in B$に対し，

$$\lim_{h\to 0+} d(\varphi(0)+hf(\sigma,\varphi),\Omega_{\sigma+h})/h=0$$

が成立する。

この定理を証明するために，特殊な近似解を構成しなくてはならない。以下このsectionでは(ii)を仮定する。

任意の$(\sigma,\varphi)\in R\times B$，ただし$t\leqq\sigma$で$\varphi(t-\sigma)\in\Omega_t$となるもの，を1つ固定する。$f$は連続であるから，ある正数$r$, A, δが存在し$[\sigma,\sigma+A]\times\{\psi\in B;|\varphi-\psi|<\delta\}$上で$|f|\leqq r$となる。また$L=\max\{K(\beta);0\leqq\beta\leqq A\}>0$とする。$\tilde{\varphi}$を

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t-\sigma), & t\leqq\sigma\\ \\ \varphi(0), & t\geqq\sigma,\end{cases}$$

で定義すると，任意の$t\geqq\sigma$に対し，(B1)より，$\tilde{\varphi}_t\in B$かつ$\tilde{\varphi}_\sigma=\varphi$. さらに，(B1)よりある$\alpha=\alpha(\sigma,\varphi)$, $0<\alpha<A$，が存在して，任意の$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$に対し　$3Lr\alpha+|\tilde{\varphi}_t-\varphi|<\delta$　となる。　次に集合Wを
$W=\{(t,u_t);\sigma\leqq t\leqq\sigma+\alpha,\ u_\sigma=\varphi$かつ$[\sigma,\sigma+\alpha]$上で$|u(t)-u(s)|\leqq 2r|t-s|\}$

で定義すると，補題1よりWはcompactである。

さて，ε, $0<\varepsilon<r$, が与えられたとする。Wはcompactであるから，ある$\eta(\varepsilon, W)>0$が存在し，もし$(t,\varphi^i)\in W$かつ$|\varphi^1-\varphi^2|<\eta(\varepsilon,W)$であれば$|f(t,\varphi^1)-f(t,\varphi^2)|<\varepsilon$となる。更に$\eta(\varepsilon,W)$を$\eta(\varepsilon,W)<Lr\alpha$となるように選んでおく。以下の様な近似解を考える。$Q_\varepsilon(\sigma,\varphi)$を次の様な組$(T,x)$の集合とする：$0<T\leqq\alpha$，$x$は$(-\infty,\sigma+T)$で定義された$R^n$値函数で次の性質をもつ。

(I)　$x_\sigma=\varphi$, $x(\sigma+T)\in\Omega_{\sigma+T}$ かつ $d(x(t),\Omega_t)<\eta(\varepsilon,W)L^{-1}$が$[\sigma,\sigma+T]$上で成立する。

(II)　$|x(t)-x(t')|\leqq 2r|t-t'|$，$t,t'\in[\sigma,\sigma+T]$。

(III)　$|\dot{x}(t)-f(t,x_t)|\leqq 3\varepsilon$，almost all $t\in[\sigma,\sigma+T]$，ただし$\dot{x}(t)$は$x(t)$の微係数を表わす。

(IV)　長さεの任意の$[\sigma,\sigma+T]$の部分区間は，$(s, x(s))\in\Omega$となるような点sを含む。

<u>補題4</u>．十分小さな任意の$\varepsilon>0$に対し，$Q_\varepsilon(\sigma,\varphi)$はnon-emptyである。

<u>補題5</u>　十分小さな任意の$\varepsilon>0$に対し，$Q_\varepsilon(\sigma,\varphi)$は$(\alpha,x)$なる要素をもつ。

上記2つの補題の証明が一番肝腎なところですが，証明が複雑で長くなるので割愛します。この証明に前sectionの補題3がフルに用いられます。詳しくはSawano[10]を見て下さい。

4．定理の証明　　まず(i)⇒(ii)を示そう。(i)より(σ,φ)を通る(2)の解xで，$(t,x(t))\in\Omega$となるものが存在する。$x(t)=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)\,ds$と書けるから，

$$d(\varphi(0)+hf(\sigma,\varphi),\Omega_{\sigma+h})/h \leqq |\varphi(0)+hf(\sigma,\varphi)-(\varphi(0)+\int_\sigma^{\sigma+h} f(s,x_s)ds)|/h$$
$$\leqq |f(\sigma,\varphi)-\frac{1}{h}\int_\sigma^{\sigma+h} f(s,x_s)ds|\ 。$$

よって$h\to 0^+$として(ii)が従う。次に(ii)⇒(i)を示そう。数列$\{\varepsilon_k\}$を$\varepsilon_k>0$，$\varepsilon_k\to 0$となるものとする。$(\sigma,\varphi)\in R\times B$を$\varphi(t-\sigma)\in\Omega_t$が$t\leqq\sigma$で成立するようなものとする。補題5によって，$Q_{\varepsilon_k}(\sigma,\varphi)$は$(\alpha,x^k)$なる要素を含む。このとき函数列$\{x^k(t)\}$は$[\sigma,\sigma+\alpha]$上で一様有界かつ同程度連続となるから，$\{x^k(t)\}$はある連続函数$x(t)$に$[\sigma,\sigma+\alpha]$上一様収束しているとしてよい。$x(t)$を$t\leqq\sigma$で$\varphi(t-\sigma)$とおく。このとき(B1)より，$x_t$は全ての$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$で$B$に属し，また(B2)により，$|x_t^k-x_t|\to 0$が任意の$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$で成立する。(II)により，$(t,x^k(t))$は任意の$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$でcompact set Wに属するから$|f(t,x_t^k)|$は有界となる。よって，Lebesgueの有界収束定理，(II)および(III)により

$$\begin{aligned} x(t)=\lim_{k\to\infty}x^k(t) &= \lim_{k\to\infty}\{\varphi(0)+\int_\sigma^t \dot{x}^k(s)ds\} \\ &= \varphi(0)+\lim_{k\to\infty}\{\int_\sigma^t f(s,x_s^k)ds+\int_\sigma^t[\dot{x}^k(s)-f(s,x_s^k)]ds\} \\ &= \varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds \end{aligned}$$

が全ての$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$で成立する。すなわち$x(t)$は$(\sigma,\varphi)$を通る(2)の解である。次に(IV)より，任意の$t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$と任意の$k$に対

し．ある点 $s^k\in[\sigma,\sigma+\alpha]$ が存在し，$|t-s^k|\leqq\varepsilon_k$，$(s^k,x^k(s^k))\in\Omega$ を満たす。このとき(II)により

$$|x(t)-x^k(s^k)|\leqq|x(t)-x^k(t)|+|x^k(t)-x^k(s^k)|\leqq|x(t)-x^k(t)|+2\varepsilon_k,$$

よって $\lim_{k\to\infty}(s^k,x^k(s^k))=(t,x(t))$. 補題2より Ω は閉であるから $(t,x(t))\in\Omega$。故に $x(t)$ は (σ,φ) を通る(2)の解で，$t\in(-\infty,\sigma+\alpha]$ で $(t,x(t))\in\Omega$ となる。

さて集合 $Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ を次のように定義する。

$Q(\sigma,\varphi,\Omega)=\{(T,y)\in Q(\sigma,\varphi)$; 任意の $t\in(-\infty,\sigma+T)$ に対し $(t,y(t))$ が Ω に属する。$\}$

このとき $Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ は nonempty である。実際 $(\alpha,x)\in Q(\sigma,\varphi,\Omega)$。$Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ に $Q(\sigma,\varphi)$ と同じ順序を入れると，Zorn の補題により極大元 (T,y) が存在する。(T,y) が $Q(\sigma,\varphi)$ の極大元でもあることを示そう。仮にそうでないとすると，y は $t=\sigma+T$ まで延長され，補題2により，全ての $t\leqq\sigma+T$ で $(t,y(t))\in\Omega$ となる。又 (B1) より $y_{\sigma+T}\in B$ となる。よって条件(ii)を $(\sigma+T,y_{\sigma+T})$ に適用し今迄のと同じ議論により，$Q(\sigma+T,y_{\sigma+T},\Omega)$ の要素 (α',z) を得る。このとき $(T+\alpha',z)$ は $Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ の要素であり，$(T+\alpha',z)\geq(T,y)$，$(T+\alpha',z)\neq(T,y)$ となる。これは (T,y) の $Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ での極大性に反する。よって (T,y) は $Q(\sigma,\varphi)$ および $Q(\sigma,\varphi,\Omega)$ の極大元である，すなわち，y は (σ,φ) を通る(2)の解で，右極大存在区間 $(-\infty,\sigma+T)$ で定義され，その間 $(t,y(t))\in\Omega$ となる。

参考文献

[1]. H. Brezis, On a characterization of flow-invariant sets, Comm. Pure Appl. Math., 23(1970), 261-263.

[2] M.G. Crandall, A generalization of Peano's existence theorem and flow invariance, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1972), 151-155.

[3] J.K. Hale, Dynamical systems and stability, J. Math. Anal. Appl., 26 (1969), 39-59.

[4] J. K. Hale and J. Kato, Phase space for retarded differential equations with infinite delay, Funkcial. Ekvac., 21 (1978), 11-41.

[5] P. Hartman, On invariant sets and on a theorem of Wazewski, Proc. Amer. Math. Soc., 32 (1972), 511-520.

[6] T. Kaminogo, Kneser's property and boundary value problem for some retarded functional differential equations, Tohoku. Math. J., 30 (1978), 471-486.

[7] V. Lakshmikantham, S. Leela and V. Moauro, Existence and uniqueness of solutions of delay differential equations on a closed subset of a Banach spaces, Nonlinear. Analysis., 2 (1978), 311-327.

[8] S. Leela and V. Moauro, Existence of solutions in

a closed set for delay differential equations in Banach spaces, Nonlinear Analysis., 2 (1978), 47–58.

[9] R. H. Martin, Approximation and existence of solutions to ordinary differential equations in Banach spaces, Funkcial. Ekvac., 16 (1973), 195–211.

[10] K. Sawano, Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay, Tohoku. Math. J., to appeare.

[11] G. Seifert, Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations, J. Differential equations, 22 (1976), 292–304.

[12] J. A. Yorke, Differential inequalities and non-Lipschitz scalar functions, Math. System Theory., 4 (1970), 140–153.