数理解析研究所講究録
第 386 巻 1980 年 42-52

非線形分散型波動方程式の急減少解

早稲田大学　理工　堤　正義

1. 初めに，　非有界な領域における初期値（境界値）問題においては，境界条件に $|x|\to\infty$ での解の漸近挙動に関する条件（漸近条件）が含まれる．通常，それらは，問題を取扱う関数空間 X（すなわち，初期条件 u_0 に対する解を $u(t)$ としたとき $S_t : u_0 \longmapsto u(t)$ が X から X の中への写像になるような空間 X）の選び方に陰に含まれている．問題が物理現象を記述しているものならば，物理の要請からその適切な漸近条件が与えられる（例えば，波動の散乱，非有界な領域内の流体の流れ等）。ところで，KdV 方程式等，非線形分散型波動方程式らは，物理現象に深くかかわりあっているものの，ある原方程式から例えば逓減摂動法等によって導かれたものであるため，その物理的に適切な漸近条件は何であるか判然としていない。そこで数学的興味もあって，いくつかの漸近条件が考えられる．KdV 方程式 $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

を例にとると，$\forall t>0$：$S_t: X \longrightarrow X$ なる関数空間 X として

1) $X=\{ f\in C^\infty \mid D^k f(x) = o(|x|) \quad k=0,1,2,\cdots,7 \}$ （Menikov[5] 1972）

2) $X=\{ f\in \mathcal{B}^\infty \mid Df \in H^\infty(\mathbb{R}) \}$ （Tsutsumi[9] 1972）

3) $X= H^s(\mathbb{R}),\quad s>\frac{3}{2}$ （Temam[8] 1969）

4) $X= \mathcal{S}(\mathbb{R})$ （Tanaka[7] 1974）

が考察された．（$D=\frac{d}{dx}$）（最近の逆散乱解法を用いた Murray (1978) の仕事において，不連続な初期関数に対する大域解の存在，$|x|\to\infty$ での初期関数の減少のオーダーと解の滑らかさ及びその減少のオーダーとの関係が詳しく調べられた）．

上記の KdV 方程式に対する結果のうち，3) に対応する結果は，他のいろいろな非線形分散型波動方程式，例えば非線形 Schrödinger 方程式，KdV 方程式の種々の一般化，BBM 方程式等に対して得られている．

ここでは，4）に対応する結果を上記方程式達に対して得たいというのが目的である。ところで，4) の結果は逆散乱解法によるもので，一般には，その方法を適用することは出来ないので他の方法を考える必要がある．そこで，その inverse limit が $\mathcal{S}$ になるような Banach chain (a chain of weighted Sobolev spaces) を考え，その中で上記方程式達を取扱うというのが，この論文の idea である。その為の準備は次の§で述べる。§3 以降において，非線形 Schrödinger 方程式，

Generalized KdV方程式の初期値問題を考える.

2. Weighted Sobolev Space に関するいくつかの結果.

ここでは, Weighted Sobolev Space に関するいくつかの結果を証明なしに述べる. (後の§で用いないものもある). それらは, Triebel[11], Adams[1] 等によって証明されているものもあるし, そうでないものもあるが, 大概 通常の Sobolev Space の Analogy である. 記号: $K=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $1\leqq p\leqq\infty$ (or $1<p<\infty$), $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $s, r\in\mathbb{R}$. $\rho(x)=(1+|x|^2)^{1/2}$, $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ $|x|=\left(\sum_{j=1}^{d}|x_j|^2\right)^{1/2}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^d$. $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $|\alpha|=\sum_{j=1}^{d}\alpha_j$.

Weighted Sobolev Spaces $H_r^{s,p}$, $W_r^{s,p}$ を次のように定義する:

$$H_r^{s,p}(\mathbb{R}^d;K)=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;K)\mid \|u\|_{r,s,p}=|\mathcal{F}^{-1}\rho^s\mathcal{F}u|_{p,r}<\infty\},$$

$$W_r^{s,p}(\mathbb{R}^d;K)=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;K)\mid \|u\|_{r,s,p}^*=\left(\sum_{|\alpha|\leq s}|D^\alpha u|_{p,r}^p\right)^{1/p}<\infty\}.$$

ここで, $|f|_{p,r}=|\rho^r f|_p=\left(\int\rho(x)^{pr}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Lemma 2.1. $s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$; $p>1$ ならば $H_r^{s,p}=W_r^{s,p}$.

Lemma 2.2. 任意の $r_0, s_0, r_1, s_1\in\mathbb{R}$, $1<p_0, p_1<\infty$, $0<\theta<1$ に対して,

$$[H_{r_0}^{s_0,p_0}, H_{r_1}^{s_1,p_1}]_\theta=H_r^{s,p},$$

$$(H_{r_0}^{s_0,p_0}, H_{r_1}^{s_1,p_1})_{\theta,p}=B_{p,p}^{s,r}$$

が成り立つ. ここで

$$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1,\quad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad r=(1-\theta)r_0+\theta r_1 .$$

但し, $[\ ,\ ]_\theta$ は complex interpolation, $(\ ,\ )_{\theta,p}$ は real interpolation

を示す．また

$$B^{s,r}_{p,q} = \{ u \in \mathcal{S}' \mid \|u\|_{r,s,p,q} = (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} |\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{f})|^q_{p,r})^{1/q} < \infty \}.$$

ここで，$\phi_j(y) = \phi(2^{-j}y)$，$(j \geq 1)$，$\phi_0(y) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y)$，

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ with $\phi(y) \geq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^d$，$\mathrm{supp}\,\phi \subset \{ y \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{2} \leq |y| \leq 2 \}$.

Lemma 2.3　もし $r > s$ ならば，埋込 $H^{s,p}_r \longrightarrow L^p$ ($W^{s,p}_r \to L^p$) は compact である．

Lemma 2.4．任意の $s, r \in \mathbb{R}$，$p > 1$ に対して

$$(H^{s,p}_r)' = H^{-s,p'}_{-r},$$

但し X' は X の dual space．

Lemma 2.5．任意の $p > 1$，$r, s \in \mathbb{R}$ に対して，$\|u\|_{r,s,p}$ と $|\mathcal{F}^{-1}\rho^s\mathcal{F}(\rho^{pr}u)|_p$ は equivalent norm である．

Theorem 2.1．任意の $s_0 \leq s_1$，$r_0 \leq r_1$ に対して $H^{s_1,p}_{r_1} \hookrightarrow H^{s_0,p}_{r_0}$（但し $X \hookrightarrow Y$ は injection $X \to Y$ 連続を示す）．さらに，

$$\bigcap_{r,s \geq 0} H^{s,p}_r(\mathbb{R}^d; K) = \bigcap_{r,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}} H^{s,p}_r(\mathbb{R}^d; K) = \mathcal{S}.$$

が成り立つ．

非線形分散型波動方程式の初期値問題を扱うには，次の関数空間が便利である：

$$\mathcal{S}^s_r = \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R}^d; K) = H^{0,2}_r(\mathbb{R}^d; K) \cap H^{s,2}_0(\mathbb{R}^d; K)$$

with the norm $|||u|||_{r,s} = (\|u\|^2_{r,0} + \|u\|^2_{0,s})^{1/2}$;

$$\mathcal{S}^k = \mathcal{S}^k_k.$$

Theorem 2.1 から次の定理が従う：

Theorem 2.2. 1) 任意の $r, s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{S}_r^s \hookrightarrow [H_r^{0,2}, H_0^{s,2}]_\theta = H_{(1-\theta)r}^{\theta s,2} \qquad 0<\theta<1,$$

2) $r \geq r'$, $s \geq s'$ ならば $\mathcal{S}_r^s \hookrightarrow \mathcal{S}_{r'}^{s'}$.

3) $\bigcap_{s,r \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{S}_r^s = \mathcal{S}$, さらに $\bigcap_{k \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{S}^k = \mathcal{S}$.

次の系は，Theorem 2.2 から直ちに得られる．

Corollary 2.1. 任意の $u \in \mathcal{S}_r^s$ に対して

$$|||D^\alpha u|||_{r',s'} \leqq \text{Const.}\, |||u|||_{r,s}$$

ここで，$r' = (s+|\alpha|)r/s$，$s' = s-|\alpha|$.

Corollary 2.2. $r, s \geqslant 0$ とする．任意の $u \in \mathcal{S}_r^{rs}$ に対して

$$\|u\|_{r-1,s} \leqq \text{Const.}\, |||u|||_{r,rs}$$

Theorem 2.3. $s > \frac{d}{2}$ とする．任意の $u, v \in \mathcal{S}_r^s$ に対して

$$|||u \cdot v|||_{r,s} \leqq \text{Const.}\, |||u|||_{r,s}\, |||v|||_{r,s}$$

すなわち，$\mathcal{S}_r^s$ は pointwise multiplication に関して quasi-normed algebra になる．

3. 非線形 Schrödinger 方程式

次の初期値問題を考える．

$$(3.1)\begin{cases} iu_t - \Delta u + f(|u|^2)u = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Theorem 3.1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ with $s \geqq r$ and $s > \frac{d}{2}$ とする．このとき，任意の初期関数 $u_0 \in \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ に対して，ある $T^* > 0$ が存在して，$[0, T^*]$ において，初期値問題 (3.1) の解 $u = u(t,x)$ で $u \in L^\infty(0, T^*; \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ なるものが一意的に存在する．もし $s \geqq 2$ ならば

$$u \in C([0,T^*]; \mathcal{S}^{s'}_{r'}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$$
$$u_t \in L^\infty(0, T^*; \mathcal{S}^{s'}_{r'}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$$

となる，ここで $s' = s-2$, $r' = (s-2)r/s$.

Corollary 3.2. $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ ならば．$u \in C^\infty([0,T^*]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$.

Remark 3.1. f が多項式のときは，Theorem 2.3 によって，上記の Theorem 3.1 の主張は，$r, s \in \mathbb{R}^+$, $s \geqq r$, $s > \frac{d}{2}$ に対して成り立つ．

Theorem 3.1 と通常の Sobolev Space における結果[3),6)]を合わせると，次の定理が得られる．

Theorem 3.2. $1 \leq p < 1 + \frac{4}{d}$, $\rho = \frac{d+2}{d-2} - \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$ とする．$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は次の仮定を満足するものとする：

1) $f(0) = 0$, 2) $\displaystyle\int_0^u f(\sigma)\,d\sigma \geqslant -C_1 u^{(1+p)/2}$

3) $|f^{(k)}(u)| \leq C_2 |u|^{(\rho-1)/2 - k}$ $|u| \geqslant 1$. $k = 0, 1, 2$

さらに $d = 1, 2, \cdots, 6$ とする．このとき，任意の $u_0 \in \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ ($s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) $(s \geqq r \geqq 0,\ s > \frac{d}{2})$ に対して，初期値問題 (3.1) は大域解 $u \in L^\infty(0, T; \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ をもつ．特に $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ ならば，

$u\in C^\infty([0,T];\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}))\quad {}^\forall T>0.$

Remark 3.2. $d=7,8,9$ に対しても，f の高次の導関数に条件を加えることによって同様の結果が得られる.[12)]

証明の概略を述べよう.

次の§で述べる Generalized KdV 方程式の場合と同様に parabolic regularization technique を用いる．すなわち，次の初期値問題を考える：

$$(3.2)\quad \begin{cases} u_t+(i-\frac{1}{n})\Delta u-if(|u|^2)u=0, & x\in\mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(0,x)=u_{0n}(x) \end{cases}$$

ここで，$\{u_{0n}\}$ は $\mathcal{S}$ の元よりなる点列で，$u_{0n}\longrightarrow u_0$ strongly in $\mathcal{S}^s_r$ なるもの。初めに，次の補題を証明する.

Lemma 3.1. 各固定した $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある $T_n>0$ が存在して，$[0,T_n]$ において，初期値問題 (3.2) は一意解

$$u_n\in C^\infty([0,T_n];\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}))$$

をもつ.

Lemma 3.1を証明するためには，任意の $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$u_n\in L^\infty(0,T_n;\mathcal{S}^{j,0}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}))$$

なることを示すことが本質的であるが，それは j に関する帰納法によって証明される.

次に，T_n が n に依存しない $T^*>0$ によって下から持ち上がっており，区間 $[0,T^*]$ において，a priori estimates

$$\sup_{0\le t\le T^*} |||u_n(t)|||^2_{r,s} \leqq l_{r,s}(|||u_{0n}|||^2_{r,\max(r,s)})$$

が任意の $r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ （$f(\cdot)$が多項式ならば $r,s\in\mathbb{R}^+$）に対して成立することが示せれば，定理の主張は直ちに得られる．但し $l_{r,s}(\cdot)$ は n に依存しない非負・非減少連続関数である．

$T_n \ge T^*$なる $T^*>0$ が存在すること及び $r=0$のときの評価は通常の weight のない Sobolev Space 中の energy method でいえるので，次の a priori estimate を示せばよい：任意の $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，

$$(3.3)\qquad \sup_{0\le t\le T^*} \|u_n(t)\|^2_{r,0} \le l_{r,r}(|||u_{0n}|||^2_{r,r}).$$

評価 (3.3) を証明しよう．方程式 (3.2) と Schwarz の不等式，Corollary 2.2 を用いると．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{r,0} &= -\frac{2}{n}\|\nabla u_n\|^2_{r,0} - \frac{4r}{n}\mathrm{Re}\int \rho^{2(r-1)}(x\cdot\nabla u_n)\overline{u_n}\,dx \\
&\qquad -4r\,\mathrm{Im}\int \rho^{2(r-1)}(x\cdot\nabla u_n)\overline{u_n}\,dx \\
&\leqq -\frac{2}{n}\|\nabla u_n\|^2_{r,0} + \frac{4r}{n}\|\nabla u_n\|_{r,0}\|u_n\|_{r-1,0} \\
&\qquad + 4r\|\nabla u_n\|_{r-1,0}\|u_n\|_{r,0} \\
&\leqq C\|u_n\|^2_{r,0} + C|||u|||_{r,r}\|u_n\|_{r,0} \\
&\leqq C\|u_n\|^2_{r,0} + l_{0,r}(\|u_0\|^2_{0,r})
\end{aligned}$$

あとは，Gronwall の不等式を用いれば，(3.3)が得られる．

4. Generalized KdV 方程式

前の§で述べた方法は Generalized KdV 方程式の初期値

問題に対しても適用できる．議論の進め方はまったく同様であり，細部の評価に必要な technique が多少繁雑になるだけであるから，得られた結果と，用いた parabolic regularization のみを記す．

初期値問題

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} u_t + u_{xxx} + (g(u))_x = 0, & x \in R,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}
$$

を考える．但し $g \in C^\infty(R,R)$，$g(0)=0$．

Theorem 4.1. $r, s \in N \cup \{0\}$，$s \geqq 2r$ かつ $s > \frac{1}{2}$ とする．このとき，任意の初期関数 $u_0 \in \mathcal{S}^s_r(R,R)$ に対して，ある $T^* > 0$ が存在して，$[0,T^*]$ において初期値問題の解 $u = u(t,x)$ で $u \in L^\infty(0,T^*; \mathcal{S}^s_r(R,R))$ なるものが存在する．もし $s \geqq 3$ ならば $u \in C([0,T^*]; \mathcal{S}^{s'}_{r'}(R,R))$，$u_t \in L^\infty(0,T^*; \mathcal{S}^{s'}_{r'}(R,R))$ である．ここで，$s' = s-3$，$r' = r(s-3)/s$．

Corollary 4.1. $u_0 \in \mathcal{S}(R,R)$ ならば，$u \in C^\infty([0,T^*]; \mathcal{S}(R,R))$．

Remark 4.1. もし $g(\cdot)$ が多項式ならば，定理の主張は，$r, s \in R^+$，$s \geqq 2r$，$s > \frac{1}{2}$ に対して成立する．

H^s-space における結果[10] と Theorem 4.1 から次の定理が成り立つ：

Theorem 4.2. Theorem 4.1 の仮定のほかに，つぎのことを仮定する： g は次の2つの条件のうちの1つを満足する

ものとする．

1) $\int^{u} g(\xi)d\xi \geq 0, \quad dg(u)/du \geq 0$;

2) $|g(u)| \leq K_1(1+|u|^3)|u|, \quad K_1$ は正定数．

このとき，任意の $T>0$ と任意の $u_0 \in \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ に対して，初期値問題 (4.1) は大域的一意解 $u \in L^\infty(0,T; \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R};\mathbb{R})$ をもつ

特に，$u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ならば，$u \in C^\infty([0,T]; \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$, $\forall T>0$.

用いた parabolic regularization は

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + (g(u))_x = \dfrac{1}{n}(u_{xx} - u_{xxxx}) \\ u(0,x) = u_{0n}(x) \end{cases}$$

である．

文献．

1) R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press 1975

2) T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahoney, Phil. Trans. Roy. Soc. A 272 (1972). 47

3) J. Ginibre - G. Velo, J. Funct. Anal., 32 (1979) 1, 33.

4) L.A.J. Medeiros - M.M. Miranda, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977) 432

5) A. Menikov, Comm. Pure Appl. Math., 25, (1972)

6) W.A. Strauss - J.E. Lin, J. Funct. Anal., 30 (1978) 245

7) S. Tanaka, Osaka J. Math., 11 (1974) 49

8) R. Temam, J. Math. Pure Appl., 48 (1969) 159

9) M. Tsutsumi, Funkcialaj Ekvacioj 15 (1972) 161.

10) M. Tsutsumi · T. Mukasa, Funkcialaj Ekvacioj, 14 (1971) 89
11) H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wissenschaften, Berlin. 1978.
12) M. Tsutsumi · N. Hayashi (未発表)