数理解析研究所講究録
第 386 巻 1980 年 53-69

準線型波動方程式について

名大 理学部 山田義雄

§1 はじめに

非線型波動方程式の形には色々あるが，準線型の場合に限って話を進めよう．我々は，以下の二つの話題に興味をもっている．

まず，第一に考えるのは，次の形の準線型波動方程式

$$(\mathrm{I}) \qquad u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, u_t, \operatorname{grad} u) u_{ij} = 0, \quad x \in R^n,\ t \geq 0,$$

$(u = u(x,t),\ u_t = \partial u/\partial t,\ u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2,\ \operatorname{grad} u = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n),$ $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$) に対する初期値問題である．以下で扱う関数はすべて実とする．上の方程式 (I) の係数 $a_{ij}(v, w, \eta)$ $(v, w \in R,\ \eta \in R^n)$ については，

(A.1) $a_{ij} = a_{ji} \in C^{m+2}(R^{n+2})$, $i,j = 1, 2, \cdots, n$. 但し，m は $m \geq [\frac{n}{2}] + 1$ をみたす整数である．

(A.2) 正の単調非増加関数 $a_0(\cdot)$ が存在して，任意の

$|v| \leqq \rho$, $|w| \leqq \rho$, $|\eta| \leqq \rho$, $\xi \in R^n$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v, w, \eta)\xi_i \xi_j \geqq a_0(\rho)|\xi|^2$$

が成立する。

を仮定する。このような仮定をみたす例としては，弦や膜の非線型振動を記述する方程式

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\, u|^2}} \right)_i$$

がある。(I)の形の方程式に対する初期値問題は，多くの人々によって研究されているが，Dionne [3]の仕事に代表されるように，そのアプローチの仕方は，線型波動方程式に対する結果と不動点定理(逐次近似法)を組合せるのが通常である。しかし，このアイデアの自然さと対照的に，(時間に関する)局所解の存在を示すための論証過程はかなり面倒である。そこで，我々は，(I)に対する初期値問題の局所解の存在を，できるだけ簡単かつ初等的に示せるような別の方法がないものか，問題にする。実は，発展方程式論の立場からのアプローチが，"粘性法"と組合せることにより可能であり，比較的簡単に，局所解の存在を証明できる。

第二に，我々が考えたい準線型波動方程式は，"微積分"型の方程式

$$\text{(II)} \qquad u_{tt} - \sigma\left(\int_{R^n} |\mathrm{grad}\; u(x,t)|^2 dx\right)\Delta u = 0, \quad x \in R^n,\ t \geqq 0$$

に対する初期値問題である．係数 σ は

(B) $\quad \sigma \in C^1([0,\infty))$ かつ $\sigma(r) \geq \sigma_0 > 0, \ {}^\forall r \geq 0.$

をみたすものとする．(II)のタイプの方程式は，弾性体の非線型振動をモデルとして，Dickey [1], [2] らにより扱われたものであるが，面白い性質をもっている．普通，非線型方程式の初期値問題を考える際，(時間に関する)大域解が存在するための十分条件として，初期データの大きさに制約を設けることが多い．(例えば，(I)のタイプの方程式に，消散項を付加えて初期値問題を考えてみよ．Matsumura [9] 参照.) しかし，(II)のような微積分型の波動方程式に対しては，このような"定量的"な条件ではなくて，むしろ"定性的"な条件を初期データに課することによっても，大域解の存在を主張できることを示そう．

以下の節で使う記号の約束をする．$L^2 = L^2(R^n)$ の内積，ノルムを $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ によって表す．また $H^m = H^m(R^n)$ によって，通常の m 次の Sobolev 空間を表す．内積は

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

ノルムは $\|u\|_m = (u, u)_m^{1/2}$ によって定義する．任意のヒルベルト空間 H に対し，$C^k([0,T]; H)$ によって H の強位相で $[0,T]$ 上，k 回連続的微分可能な，H-値関数の全体を表すことにする．

§ 2. (I)に対する初期値問題

この節では，(I)に対する初期値問題

$$(\mathrm{IVP})_0 \qquad \begin{cases} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, u_t, \operatorname{grad} u) u_{ij} = 0, & x \in R^n,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), & x \in R^n, \end{cases}$$

を考える。(以下の議論の詳細は Yamada [17] を参照してほしい。)

我々は，$(\mathrm{IVP})_0$ を発展方程式的に，言い換えれば，適当な関数空間上の常微分方程式として取扱いたい。Sobolev 空間 H^m をとり，$(\mathrm{IVP})_0$ を H^m において

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - B(u, u_t) = 0, & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0, \end{cases}$$

の形で考えてみよう。但し，

$$B(u, u_t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, u_t, \operatorname{grad} u) u_{ij}.$$

しかし，(2.1) に適用できるような，発展方程式のうまい一般論はない。そこで，パラメーター $0 < \lambda \leq 1$ と，自己共役な二階線型楕円型作用素 A を用いて，問題の双曲型方程式を次の形に "放物型正則化" する。

$$(2.2) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \lambda A u_t - B(u, u_t) = 0, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0. \end{cases}$$

この初期値問題 (2.2) は，(2.1) と比べると，次に説明するように，取扱いがずっと容易である。λ を 0 に近ずけることによ

り，(2.2)の解は，(2.1)の解に収束するだろう，というのが我々の基本的アイデアである．

以上の方針をもう少し丁寧に述べてゆこう．H^m が Banach algebra をなすように，$m \geqq [\frac{n}{2}]+1$ととる．初期データについては，まず $\{u_0, v_0\} \in H^{m+2} \times H^m$ と仮定する．(2.1)を H^m 上で扱いたいのであるが，次の補題を準備する．

<u>補題 2.1.</u>　$u^i \in H^{m+2}$, $v^i \in H^m$ $(i=1,2)$ とする．仮定(A.1)の下で，ある単調非減少関数 $M(\cdot)$ が存在して，

$$\|a_{ij}(u^1, v^1, \mathrm{grad}\, u^1) u^1_{ij} - a_{ij}(u^2, v^2, \mathrm{grad}\, u^2) u^2_{ij}\|_m$$
$$\leqq M(\|u^1\|_{m+2} + \|u^2\|_{m+2} + \|v^1\|_m + \|v^2\|_m) \{\|u^1 - u^2\|_{m+2} + \|v^1 - v^2\|_m\},$$
$$1 \leqq i, j \leqq n,$$

が成立する．

さて，H^mにおける負値自己共役作用素 A を

$$D(A) = H^{m+2}, \quad Au = (\Delta - 1)u \quad (u \in D(A))$$

によって定義する．A は H^m における解析半群 $\{e^{tA}\}_{t \geqq 0}$ を生成する．冒頭で述べたように，(2.1)を(2.2)の形に放物型正則化することは，(IVP)$_0$ の代わりに，初期値問題

$$(\mathrm{IVP})_\lambda \quad \left\{ u_{tt} - \lambda(\Delta - 1)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, u_t, \mathrm{grad}\, u) u_{ij} = 0, \quad x \in R^n, \quad t \geqq 0 \right.$$

$$\left\{ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in R^n, \right.$$

を考えることを意味する．まず，$(IVP)_\lambda$ を H^m において，即ち，(2.2) の形で，クラス

(2.3) $\quad u \in C([0,T];H^{m+2}) \cap C^1([0,T];H^m) \cap C^1((0,T];H^{m+2}) \cap C^2((0,T];H^m)$

において解くことを目標とする（T は適当な正数）．先に，(2.2) は，(2.1) の放物型正則化になっていると述べたが，これは，(2.2) を，二つの一階微分方程式の系に変形するとみやすい．新しく，未知関数 $U \equiv {}^t\{v, w\}$ を

(2.4) $\quad v = u_t \quad , \quad w = Au$

によって導入する．このとき，(2.2) は，$H^m \times H^m$ における一階発展方程式に対する初期値問題

(2.5) $$\begin{cases} U_t = \mathbb{A}U + \mathbb{B}(U) , & t \geq 0 , \\ U(0) = U_0 \equiv {}^t\{v_0, Au_0\} , \end{cases}$$

となる．但し，$D(\mathbb{A}) = H^{m+2} \times H^m$ ，かつ，

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{B}(U) = \begin{pmatrix} B(A^{-1}w, v) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } U = {}^t\{v, w\},$$

である．対応 (2.4)，及び，$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\,ds$ を考慮すれば，初期値問題 (2.2) を (2.3) のクラスで解くことは，初期値問題 (2.5) をクラス

(2.6) $\quad U \in C([0,T];H^m \times H^m) \cap C^1((0,T];H^m \times H^m)$

において解くことと同値であることが容易にわかる．

ところで，初期値問題 (2.5) において注目すべき事実が二つある．第一は，$\mathbb{A}$ も $H^m \times H^m$ 上の解析半群

$$\{\mathbb{T}(t)\}_{t\geq 0} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda A} & 0 \\ (e^{t\lambda A}-I)/\lambda & I \end{bmatrix}_{t\geq 0}, \qquad I = 恒等作用素,$$

を生成することである．第二は，補題 2.1 より，$U \longrightarrow \mathbb{B}(U)$ が $H^m \times H^m$ 上の局所 Lipschitz 連続な作用素となることである．これらの事実より，(2.5) は半線型の抽象放物型方程式に対する初期値問題とみなすことができる．その上，(2.5) を (2.6) のクラスで解くことは，積分方程式

$$U(t) = \mathbb{T}(t)U_0 + \int_0^t \mathbb{T}(t-s)\mathbb{B}(U(s))ds, \qquad t\geq 0, \tag{2.7}$$

をみたす $U \in C([0,T];H^m \times H^m)$ を求めることと同値であることもわかる．(t に関する U の連続微分可能性は積分方程式からの必然的結果である．)(cf. Pazy [13])

積分方程式 (2.7) を解くことは容易である．常微分方程式でよくやるように，逐次近似法，あるいは，不動点定理を用いればよい．こうして，$(IVP)_0$ の放物型正則化問題 $(IVP)_\lambda$ は，解くことができる．結果をまとめよう．

<u>定理 2.1.</u> 仮定 (A.1) の下で，$\{u_0, v_0\} \in H^{m+2} \times H^m$ とする．このとき，$0 < \lambda \leq 1$ に対して，ある正定数 T_λ が存在して，

$(IVP)_\lambda$ は，$[0,\tau_\lambda]$ 上の一意解

$$u^\lambda \in C([0,\tau_\lambda];H^{m+2}) \cap C^1([0,\tau_\lambda];H^m) \cap C^1((0,\tau_\lambda];H^{m+2}) \cap C^2((0,\tau_\lambda];H^m)$$

をもつ．特に，$v_0 \in H^{m+1}$ ならば，u^λ は，更に，$u^\lambda \in C^1([0,\tau_\lambda];H^{m+1})$ もみたす。

定理 2.1 は，$(IVP)_\lambda$ が局所解 u^λ をもつことを保証するが，一般に，存在区間 $[0,\tau_\lambda]$ は，$\lambda \downarrow 0$ と共に $\{0\}$ に収束する．しかし，(A.2) を仮定すれば，より強い次の結果を得る．

<u>定理 2.2.</u>　仮定 (A.1), (A.2) の下で，$\{u_0, v_0\} \in H^{m+2} \times H^{m+1}$ とする．このとき，$0<\lambda\leq 1$ に対して，λ に無関係な正定数 T_0 が存在し，$(IVP)_\lambda$ は $[0,T_0]$ 上の一意解

$$u^\lambda \in C([0,T_0];H^{m+2}) \cap C^1([0,T_0];H^{m+1}) \cap C^1((0,T_0];H^{m+2}) \cap C^2((0,T_0];H^m)$$

をもつ．更に，$\{u^\lambda\}_{0<\lambda\leq 1}$ は，$C([0,T_0];H^{m+2}) \cap C^1([0,T_0];H^{m+1})$ において有界である．

<u>証明の方針</u>　この定理を証明するためには，λ に無関係な区間上で，$\|u^\lambda(t)\|_{m+2}$，$\|u_t^\lambda(t)\|_{m+1}$ が，λ に無関係な正定数により，アプリオリに評価されることを示せば十分である．このために，エネルギー法を用いよう．$(IVP)_\lambda$ の方程式と $-Au_t^\lambda$ の H^m－内積をとる．

$$(u_{tt}^{\lambda}, -Au_t^{\lambda})_m + \lambda \|Au_t^{\lambda}\|_m^2 + \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(u^{\lambda}, u_t^{\lambda}, \mathrm{grad}\, u^{\lambda})D_x^{\alpha}u_{ij}^{\lambda}, D_x^{\alpha}Au_t^{\lambda})$$

$$\text{(2.8)} \qquad + \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{i,j=1}^{n}(D_x^{\alpha}\{a_{ij}(u^{\lambda}, u_t^{\lambda}, \mathrm{grad}\, u^{\lambda})u_{ij}^{\lambda}\} - a_{ij}(u^{\lambda}, u_t^{\lambda}, \mathrm{grad}\, u^{\lambda})D_x^{\alpha}u_{ij}^{\lambda}, D_x^{\alpha}Au_t^{\lambda})$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

各 I_i を評価，整理するとき，最も問題となるのは I_4 であるが，次の補題を用いる．

補題 2.2. $u \in C([0,T]; H^{m+2}) \cap C^1([0,T]; H^{m+1})$ とする．このとき，$i,j = 1, 2, \cdots, n$，$|\alpha| \le m$，$t \in [0,T]$ に対して，

$$\|D_x^{\alpha}\{a_{ij}(u, u_t, \mathrm{grad}\, u)u_{ij}\} - a_{ij}(u, u_t, \mathrm{grad}\, u)D_x^{\alpha}u_{ij}\|_1$$
$$\le M(\|u\|_{N+1} + \|u_t\|_N)\{1 + \|\mathrm{grad}\, u\|_m + \|u_t\|_m\}^m\{\|\mathrm{grad}\, u\|_{m+1} + \|u_t\|_{m+1}\}\|\mathrm{grad}\, u\|_{m+1}$$

が成立する．但し，$M(\cdot)$ は単調非減少関数，$N = [\frac{n}{2}]+1$ である．

補題 2.2 を用いて，(2.8) を整理し，t について積分する．適当な正定数 ρ をとり，

$$E^{\lambda}(t) \equiv \|u^{\lambda}(t)\|_{m+1}^2 + a_0(\rho)\|\mathrm{grad}\, u^{\lambda}(t)\|_{m+1}^2$$

とおけば，$E^{\lambda}(t)$ は次の不等式をみたすことがわかる．

$$\text{(2.9)} \qquad E^{\lambda}(t) + \lambda\int_0^t \|Au_t^{\lambda}(s)\|_m^2 ds \le C_1(u_0, v_0) + C_2(\rho)\int_0^t E^{\lambda}(s)^{\frac{m+3}{2}} ds,$$

但し，C_1, C_2 は λ に無関係な正定数．これより，定理の主張

が得られる.

この定理2.2によって,極限移行 $\lambda \downarrow 0$ は意味あるものとなる.次の定理を得ることができる.

<u>定理2.3.</u> 定理2.2の条件下で,

$$\exists \lim_{\lambda \downarrow 0} u^{\lambda}(t) = u^{0}(t), \quad \text{strongly in } H^{m+1}, \text{ weakly in } H^{m+2}, \quad \text{uniformly in } t \in [0, T_0].$$

$$\exists \lim_{\lambda \downarrow 0} u_t^{\lambda}(t) = u_t^{0}(t), \quad \text{strongly in } H^{m}, \text{ weakly in } H^{m+1}, \quad \text{uniformly in } t \in [0, T_0].$$

u^0 は,$(\mathrm{IVP})_0$ の一意解で,$u^0 \in C^i([0,T_0]; H^{m+2-i})$ $(i=0,1,2,\cdots,m+2)$ をみたす.更に,ある正定数 C が存在して,

$$\|u_t^{\lambda}(t) - u_t^{0}(t)\|_m^2 + \|\mathrm{grad}\,\{u^{\lambda}(t) - u^{0}(t)\}\|_m^2 \leqq C\lambda, \quad 0 \leqq t \leqq T_0$$

が成立する.

<u>証明の方針</u> $1 \geqq \mu \geqq \lambda > 0$ に対し,u^{λ}, u^{μ} をそれぞれ,$(\mathrm{IVP})_{\lambda}$, $(\mathrm{IVP})_{\mu}$ の解とする.$w = u^{\lambda} - u^{\mu}$ とおく.対応する方程式と w_t との H^m-内積をとれば,(2.9)を利用することによって定理2.3の主張が得られる.

<u>注意2.1.</u> $m \geqq [\frac{n}{2}]+1$ であるから,Sobolev の埋蔵定理よ

り，定理 2.3 で得られた $(IVP)_0$ の解 u^0 は，実は古典解である．

又，u^λ_{tt} は H^m の強位相では，$t=0$ において連続と限らないが，極限 u^0_{tt} は，H^m の強位相で $t=0$ においても連続となることを注意しておく．

注意 2.2. 問題となる方程式に，パラメーターを含む余分な項を人為的に付加えて解きやすい形にする，という"粘性法"は色々の分野で利用されている．例えば，一階準線型双曲型方程式に対する適用としては，Hopf [6]，Oleinik [11]，[12] らの空間次元 1 次元の場合の研究がある．

注意 2.3. $(IVP)_\lambda$ の方程式自体に関する研究も，有界領域における初期値境界値問題として，Greenberg-MacCamy-Mizel [5] Tsutsumi [15]，Ebihara [4] らにより，Galerkin 法を用いて研究されている．(cf. Yamada [16])．

注意 2.4. 初期値問題 $(IVP)_\lambda$ に対して，初期データが小さい（$\|u_0\|_{m+2}$，$\|v_0\|_{m+1} \leq {}^\exists\delta$）ならば，大域解 u^λ が存在し，

(2.10) $\quad \|\mathrm{grad}\, u^\lambda(t)\|_{m+1},\ \|u_t^\lambda(t)\|_{m+1} = O(t^{-1/2}) \quad$ as $\quad t\to\infty$,

(2.11) $\quad \|\Delta u^\lambda(t)\|_m,\ \|\mathrm{grad}\, u_t^\lambda(t)\|_m = O(t^{-1}) \quad$ as $\quad t\to\infty$,

のように減衰してゆくことを示すことができる．しかし，初期データを制限する正数 δ は一般には，$\lambda \downarrow 0$ と共に 0 に近ずく可能性がある．

最近，Klainerman [7] は，$n \geqq 6$ の場合に，初期データが小さいならば，(IVP)$_0$ の大域解が存在することを示した．しかし，残念ながら，我々の方法では，彼の結果をカバーするまでには至っていない．ただし，(IVP)$_0$ の方程式に消散項 cu_t $(c>0)$ が加われば，空間次元にかかわりなく，大域解の存在を，初期データの大きさに制約を置いて示すことができる．消散項は，減衰効果をもち，(2.10)，(2.11) と同じ解の減衰評価を得ることができる．（Matsumura [9]，Yamada [17]）．

§3　(II) に対する初期値問題

この節では，微積分型の準線型波動方程式 (II) に対する初期値問題を考える．

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \sigma\left(\displaystyle\int_{R^n} |\operatorname{grad} u(x,t)|^2 dx\right)\Delta u = 0, & x \in R^n,\ t \geqq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), & x \in R^n. \end{cases}
$$

ここで，σ は仮定 (B) をみたすものとする．任意の正整数 k に対して，$\{u_0, v_0\} \in H^{k+2} \times H^{k+1}$ を与えれば，(3.1) が局所解 $u \in C^i([0,T]; H^{k+2-i})$ $(i = 0, 1, 2.$　T は適当な正定数）を一意に持

つことは，不動点定理によって容易に示せる．(cf. Menzala [10], Yamada [18]).

我々が興味をもつのは，(3.1) について，初期データ $\{u_0, v_0\}$ に"定性的"な条件を課しても大域解の存在を示せることである．

以後，$\{u_0, v_0\} \in H^\infty \times H^\infty$ とし，$A=-\Delta$ とおくと，(3.1) の方程式は

$$u_{tt}(t) + \sigma(\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2)Au(t) = 0, \qquad t \geq 0, \tag{3.2}$$

と表せる．さて，初期データ $\{u_0, v_0\}$ は次の条件をみたすとしよう．

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ k\{\|A^{\frac{k}{2}}v_0\|^2 + \|A^{\frac{k+1}{2}}u_0\|^2\}^{-\frac{1}{2k}} > 0. \tag{3.3}$$

このとき，次の定理が成立する．

<u>定理 3.1.</u> 仮定 (B) の下，$\{u_0, v_0\}$ は (3.3) をみたすとする．このとき，(3.1) は大域解 $u \in C^i([0,\infty); H^\infty)$ $(i=0,1,2)$ を一意にもつ．

<u>証明の方針</u> 時間に関する大域的なアプリオリ評価を得れば十分である．(3.2) と u_t の L^2-内積をとる：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Sigma(\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2) = 0,$$

但し，$\Sigma(r) = \int_0^r \sigma(s)\,ds \geq \sigma_0 r$ $(r \geq 0)$. これより，ある正定数

$C_0\ (\geqq 1)$ が存在して

(3.4) $$\|u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \leqq C_0^2$$

となる．次に，(3.2) と $A^k u_t$ との内積を考えると，

(3.5) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|A^{\frac{k}{2}}u_t(t)\|^2 + \sigma(\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2)\|A^{\frac{k+1}{2}}u(t)\|^2\}$$
$$= \sigma'(\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2)(A^{\frac{1}{2}}u(t), A^{\frac{1}{2}}u_t(t))\|A^{\frac{k+1}{2}}u(t)\|^2$$

となる．

$$\sigma_1 \equiv \sup_{0 \leqq r \leqq C_0^2}[\max\{\sigma(r), |\sigma'(r)|\}]$$

とおく．一般性を失うことなく，$0 < \sigma_0 \leqq 1 \leqq \sigma_1$ と仮定し，

$$E_k(t) \equiv \|A^{\frac{k}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{k+1}{2}}u(t)\|^2$$

を定義する．(3.5) を t について積分し，(3.4) を用いて整理すれば，

(3.6) $$E_k(t) \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\{E_k(0) + C_0\int_0^t \|A^{\frac{1}{2}}u_t(s)\|\, E_k(s)\, ds\}.$$

一方，Fourier 変換と Hölder の不等式により

(3.7) $$\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\| \leqq \|A^{\frac{k}{2}}u_t(t)\|^{\frac{1}{k}}\|u_t(t)\|^{1-\frac{1}{k}} \leqq C_0\|A^{\frac{k}{2}}u_t(t)\|^{\frac{1}{k}}$$

が成立することに注意しよう．(3.6) と (3.7) より

$$E_k(t) \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\{E_k(0) + C_0^2\int_0^t E_k(s)^{1+\frac{1}{2k}}\, ds\}$$

が得られるから，これより，我々は次の評価式を得ることができる．

$$E_k(t) \leq \left(\frac{\sigma_1 C_0^2}{2k\sigma_0}\right)^{-\frac{1}{2k}} (T_k - t)^{-2k}, \quad 0 \leq t < T_k, \tag{3.8}$$

但し，$T_k = \dfrac{2\sigma_0}{\sigma_1 C_0^2} \cdot k \cdot \left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_0} E_k(0)\right)^{-\frac{1}{2k}}$.

一方，仮定 (3.3) より，

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ T_k > \tau_0 > 0$$

となる正数 τ_0 がとれるから，(3.6), (3.7), (3.8) より，各 $E_k(t)$ は $[0, \tau_0]$ 上適当な正定数で上から押えられる．特に，正定数 C_1 が存在して

$$E_1(t) \leq C_1^2, \qquad 0 \leq t \leq \tau_0$$

となるから，(3.6) と組合せれば，

$$E_k(t) \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_0} E_k(0) \exp\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} C_0 C_1 \tau_0\right\}, \qquad 0 \leq t \leq \tau_0$$

となる．このことより，特に，

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ k \cdot E_k(\tau_0)^{-\frac{1}{2k}} \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\ k \cdot E_k(0)^{-\frac{1}{2k}}$$

がわかるから，$t = \tau_0$ を改めて初期平面としてとることによって，上の操作が $[\tau_0, 2\tau_0]$ 上でも可能である．この手続きを繰返せば，大域的なアプリオリ評価が得られる．

注意 3.1. Pohozaev [14] は，微積分型方程式に対する初期値境界値問題を有界領域において扱い，(3.3) と類似の条件下で

大域解の存在を示した.

条件(3.3)の意味について考えてみよう. 例えば, Ωを解析的境界で囲まれた有界領域とし, $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $Au=-\Delta u$とおく. このとき, (3.3)は, u_0, v_0が$\bar{\Omega}$で実解析的であることと同値である(cf. Lions [8]).

全空間の場合, (3.3)を特徴付けるのはむつかしいが, $\{u, v\}$が,

$$\{u\in\mathcal{S}\ ;\ \exists\alpha>0\ \text{s.t.}\ |\hat{u}(\xi)|=O(e^{-\alpha|\xi|})\ \text{as}\ |\xi|\to\infty\}$$

($\hat{u}$はuのFourier変換) のような関数クラスに入れば, (3.3)を満足することが, 簡単な計算によりわかる. 例えば, $\{u, v\}=\{e^{-\alpha x^2}, e^{-\beta x^2}\}$ $(\alpha>0, \beta>0)$ は (3.3) をみたすわけである.

参考文献

[1] R. W. Dickey: Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 459-468.

[2] R. W. Dickey: The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 82 (1978), 19-26.

[3] P. A. Dionne: Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, J. Analyse Math. 10 (1962), 1-90.

[4] Y. Ebihara: On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation, J. Diff. Eqs. 30 (1978), 149-164; II, to appear in J. Diff. Eqs.

[5] J. M. Greenberg, R. C. MacCamy and V. J. Mizel: On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_t$, Math. Mech. 17 (1968), 707-728.

[6] E. Hopf: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), 201-230.

[7] S. Klainerman: Global existence for nonlinear wave equations, preprint.

[8] J. L. Lions: On some equations in boundary value problems of mathematical physics, Comtemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (ed. by G. M. de La Penha and L. A. Medeiros), North-Holland, 1978.

[9] A. Matsumura: Global existence and asymptotics of the solutions of the secomd-order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 349-379.

[10] G. P. Menzala: Une solution d'une équation non lineaire d'évolution, C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 273-275.

[11] O. A. Oleinik: Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Uspehi Mat. Nauk 12 (1957), no. 3, 3-73.

[12] O. A. Oleinik: Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first-order by the introduction of "vanishing viscosity",Uspehi Mat. Nauk 14 (1959), no. 2, 159-164.

[13] A. Pazy: A class of semilinear equations of evolution, Israel J. Math. 20 (1975), 23-36.

[14] S. I. Pohozaev: On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. USSR Sbornik 25 (1975), 145-158.

[15] M. Tsutsumi: Some nonlinear evolution equations of second order, Proc. Japan Acad. 47 (1971), 950-955.

[16] Y. Yamada: Some remarks on the equation $y_{tt} - \sigma(y_x)y_{xx} - y_{xtx} = f$, to appear in Osaka J. Math. 17.

[17] Y. Yamada: Quasilinear wave equations and related nonlinear evolution equations, to appear in Nagoya Math. J.

[18] Y. Yamada: On some quasilinear wave equations with dissipative terms, preprint.