数理解析研究所講究録
第387巻 1980年 114-124

de Rham Homotopy による Open Variety の Rational type の決定

東大 理学部 河野俊丈

X, Y を 複体とし X と Y が 有理ホモトピー同値であるとは $A^*_{PL}(X)$ $A^*_{PL}(Y)$ の minimal model $\mathcal{M}_X$, $\mathcal{M}_Y$ が $\mathbb{Q}$ - differential graded algebra ($\mathbb{Q}$ - d.g.a.) として 同型であると定義する。 ここで $A^*_{PL}(X)$ とは Sullivan の意味での X上の $\mathbb{Q}$ -polynomial forms の空間とする。([5]) X, Y が 単連結の場合には $\mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_Y$ より, $\pi_j(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \pi_j(Y) \otimes \mathbb{Q}$ が 導かれる。 X が compact Kähler 多様体であるときには $\mathcal{M}_X$ は X の有理コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{Q})$ の minimal model と 同型であることが 知られている ([1])が ここでは Morgan の スペクトル列 ([3]) を explicit に 計算することによって Divisor の 補集合の 有理ホモトピー型を normal Euler 類の 立場から 論ずることにする。

1° Vを smooth complex projective variety とし Dを divisor で normal crossing であるとする.

$$D^p = \{ x \in D \ ; \ \mathrm{mult}_x D \geq p \} \quad (p \geq 1)$$
$$D^0 = V$$

とおいて Vの filtration を定める。この filtration に共調な Vの三角形分割をとる. D^pの正則近傍を N^pとし.

$$\nu : \tilde{D}^p \longrightarrow D^p$$
$$\bar{\nu} : \tilde{N}^p \longrightarrow N^p$$

を normalization とする.

$$A_n = \bigoplus_{q-p=n} H^{q-2p}(\tilde{D}^p ; \varepsilon_{\mathbb{Q}}^p)$$ （$\varepsilon_{\mathbb{Q}}^p$は divisor の順序に関する局所系）とおき

$A = \bigoplus_n A_n$ に次のように $\mathbb{Q}$-d.g.a. の構造を導入する.

（積構造）$H^{q-2p}(\tilde{D}^p ; \varepsilon_{\mathbb{Q}}^p) \ni x$

$H^{q'-2p'}(\tilde{D}^{p'} ; \varepsilon_{\mathbb{Q}}^{p'}) \ni x'$ とし

xが ω（$N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_p}$ 上の form）x'が ω'（$N_{j_1} \cap \cdots \cap N_{j_{p'}}$ 上の form）で実現されているとき.

$$x \cdot x' = [i^*\omega \wedge j^*\omega'] \in H^{(q+q')-2(p+p')}(\tilde{D}^{p+p'} ; \varepsilon_{\mathbb{Q}}^{p+p'})$$

ここで

$$N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_p} \cap N_{j_1} \cap \cdots \cap N_{j_{p'}} \xrightarrow{i} N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_p}$$
$$N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_p} \cap N_{j_1} \cap \cdots \cap N_{j_{p'}} \xrightarrow{j} N_{j_1} \cap \cdots \cap N_{j_{p'}}$$

ただし，$(i_1, \cdots, i_p) \cap (j_1 \cap \cdots \cap j_{p'}) \neq \phi$ のときは，$x \cdot x = 0$ とする。

（微分 d ）

$$j : \quad D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p} \hookrightarrow D_{i_1} \cap \cdots \overset{\overset{k}{\vee}}{} \cap D_{i_p}.$$

埋め込み j の管状近傍を N_k, Thom class を τ_k とする。次の図式を可換にする d を微分とする。

$$\begin{tikzcd}
H^{8-2p}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}) \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, "\alpha"] & \bigoplus_k H^{8-2p+2}(D_{i_1} \cap \overset{\overset{k}{\vee}}{\cdots} \cap D_{i_p}) \\
\bigoplus_k H^{8-2p}(N_k, N_k - 0) \arrow[d, "\wr\!\!\parallel \text{ exc.}"] & \\
\bigoplus_k H^{8-2p}(D_{i_1} \cap \cdots \overset{\overset{k}{\vee}}{} \cap D_{i_p}, \ D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}) \arrow[uur, "j^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha(x) = \sum_k (-1)^{8-2p} x \cup \tau_k$$

以上により，$\mathcal{A}$ は，$\mathbb{Q}$ − d.g.a. の構造をもつが，これについて，次の定理が成立する。

<u>定理 1</u>　　$X = V - D$ とすると，$\mathbb{Q}$ − d.g.a $\mathcal{A}$ の minimal model は $\mathcal{M}_X$ と，同型である。

この定理は，X の有理ホモトピー型が，

$$\{ H^{8-2p}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p} ; \mathbb{Q}) \}$$

という形の 有理コホモロジー および normal Euler 類によって定まる degree 1 map によって 決定されることを示している。

2° C, C' を $\mathbb{P}^2$の 既約曲線とし 定理1を非特異モデルについて適用すると、次の定理を得る。

<u>定理 2</u> $\mathbb{P}^2 - C$ と $\mathbb{P}^2 - C'$ が 有理ホモトピー同型であることは 次の i) ii) と同値である。

i) $\deg C = \deg C'$

ii) $\# \mathrm{Sing}\, C = \# \mathrm{Sing}\, C'$ で それらの間に 局所解析的同型が存在する。

Zariski は、既約6次曲線で cusp 6 つの場合

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 & \cdots\cdots \quad (1) \\ \mathbb{Z}_6 & \cdots\cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

((1)は 6つのcusp が ある conic 上にあるとき、(2)は それ以外のとき。)

となることを示しているが この例では 定理2によって 両者は 有理ホモトピーの 観点からは 区別できない。

3° 一般に，次のような状況を考える．

$\varpi: X \longrightarrow Y$ は smooth projective variety の間の分岐被覆で，C を critical set $D = \varpi(C)$ とする．次の i)－iii) を仮定する．

i) C, D は normal crossing divisor で，

$$C^{p} = \varpi^{-1}(D^{p}).$$

ii) $\varpi|_{X-C} : X - C \longrightarrow Y - D$ は universal abelian covering.

iii) $\pi_1(Y-D)/[\pi_1(Y-D), \pi_1(Y-D)] = \mathbb{Z}_d$

$\mathbb{Q}\langle t\rangle$ を Laurent polynomial ring とし，$\Lambda_d = \mathbb{Q}\langle t\rangle/(t^d-1)$ とおく．Λ_d は X に被覆変換として作用し，これによって A_X は Λ_d-algebra の構造をもつ．$\mathbb{P}^2$ 内に既約曲線が与えられたとき，Zariski の意味の cyclic multiple plane を考えると blowing up process によって上のような状況を作ることができる．基本群と本質的に関連するのは A_X の degree 1 part

$$(A_X)_1 \cong \left(\bigoplus_j H^0(C_j)\right) \oplus H^1(X)$$

で，knot theory との類似で，$(A_X)_1$ の Λ_d-module としての構造を決定することを考えよう．

4° $C \subset \mathbb{P}^2$ を degree d の既約曲線とし $\mathrm{Sing}\, C = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ とする．以下のように notation を定める．

$\mu(j)$ ； C の P_j における Milnor 数

S_j^3 ； P_j を中心とする十分小さな球面

$e_j^1, \cdots, e_j^{\mu(j)}$ ； vanishing cycles

$\varphi_j(t)$ ； $K_j = C \cap S_j^3$ の Alexander polynomial

3° の条件を満たし $Y - \mathcal{D} \cong \mathbb{P}^2 - C$ となるような分岐被覆 $X \longrightarrow Y$ をとり，このような X を $\widetilde{X}^d$ とかく

<u>定義</u> $\Lambda_d^M \xrightarrow{\Phi} \Lambda_d^N \longrightarrow H^1(\widetilde{X}^d; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$

を，$H^1(\widetilde{X}^d; \mathbb{Q})$ の Λ_d-module としての 1 つの presentation とする．Φ の $(N-j)$ 次小行列式で生成される Λ_d の ideal を $F_j(\widetilde{X}^d)$ とかく．$F_j(\widetilde{X}^d)$ の生成元 $f_j(t)$ を j-th Alexander polynomial とよぶ

$j \leq j'$ のとき $F_j(\widetilde{X}^d) \supset F_{j'}(\widetilde{X}^d)$

$f_j(t) \mid f_{j'}(t)$

が成立している．この global な Alexander polynomial は local な Alexander polynomial $\{\varphi_k(t)\}_k$ と次のような関係をもつ．

定理３

i)　$\mu=\mu(j)$ ならば

$$f_{N-\mu}(t)\mid \Phi_j(t) \qquad \left(N=\sum_{j=1}^{k}\mu(j)\right)$$

ii)　$\pi_1(\mathbb{P}^2-C)$ が abel 群ならば

$$f(1)f(\xi_d)\cdots\cdots f(\xi_d^{d-1})\neq 0 \qquad (f(t)=f_0(t))$$

また．m 次の cyclic multiple plane $\tilde{X}^m$ について．

iii)　$$\prod_{j=1}^{m-1}\Phi_1(\xi_m^j)\cdots\cdots\Phi_k(\xi_m^j)\neq 0 \quad \text{ならば}$$

$$b_1(\tilde{X}^m)=0.$$

（ ξ_l は １の原始 l 乗根 ）

C の singularity が すべて cusp である場合を考えると．$\Phi_j(t)=t^2-t+1$．したがって iii) より．$6\nmid m$ のときは．$b_1(\tilde{X}^m)=0$ となる．（Zariski は この結果を linear system を用いて示している） また 同じ仮定の下で．$6\mid \deg C$ と仮定すると．

$$f_{N-2}(t)=\begin{cases} t^2-t+1 & \cdots\cdots ① \\ 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① は．$\pi_1(\mathbb{P}^2-C)$ が non-abelian のとき．
② は $\pi_1(\mathbb{P}^2-C)$ が abelian のとき．　を得る．

5° 定理１−３の 証明の概略を述べる。 詳細は[2]，[3] を 参照されたい。

<u>定理１</u> polynomial form の空間 $E(X)$ を，次のように定義する。 単体 $\sigma\subset\overline{V-N^1}$ については，σ 上の forms とは，$\mathbb{Q}$-polynomial forms とし，$\sigma\subset\overline{N^p-N^{p+1}}$ については，

$$\{\mathbb{Q}\text{-polynomial forms over } \sigma\}\otimes\bigwedge(\theta_{i_1},\theta_{i_2},\cdots,\theta_{i_p})$$

ここで，$\deg\theta_{i_1}=\cdots=\deg\theta_{i_p}=1$ で，$d\theta_{i_j}=\tau_{i_j}|\sigma$
（τ_{i_j} は 埋めこみ，$D_{i_j}\longrightarrow V$ の Thom form で，$D_{i_1},\cdots,D_{i_p}$ は，σ をとおる divisors ）

$$W_{-j}(E(X))=\left\{\sum\alpha\wedge\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_t}\ ;\ \begin{array}{l}\alpha\text{ は }V\text{ 上の }\mathbb{Q}\text{-polynomial}\\ \text{form で}\quad t\leq j\end{array}\right\}$$

として，$E(X)$ の weight filtration を，導入する。

<u>Step 1</u> 1) $wE_0^{-p,q}=Gr_W^{-p}(E^{-p+q}(X))\overset{\text{res}}{\cong}\mathcal{E}^{q-2p}(\tilde{N}^p;\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^p)$
2)，$wE_1^{-p,q}\cong H^{q-2p}(\tilde{D}^p;\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^p)$，を示す。

<u>Step 2</u> スペクトル列の E_1-term の微分 d_1 が，$\mathbb{Q}$-d.g.a. $\mathcal{A}$ の 微分 d と 一致することを，証明する。

Step 2 については $x \in H^{8-2p}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p})$ とし、
$[\omega] = x$ とすると、

$$d(\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p})$$
$$= d\omega + (-1)^{8-2p}\left\{ \sum_{k=1}^{p} \tau_{i_k} \wedge (\omega_{i_1} \wedge \cdots \overset{k}{\vee} \wedge \omega_{i_p}) \right\}$$

また、$[\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}] \in {}_W E_0^{-p,8}$ について、

$$d_0 [\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}] = [d\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}]$$
$$d_1 [\omega] = d_1 [\operatorname{res}(\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p})]$$
$$= (-1)^{8-2p} \sum_{k=1}^{p} x \wedge \tau_{i_k}$$

これによって、主張が示された。

E_1-term からつくられる d.g.a の minimal model の構成は、Morgan による。

<u>定理 2</u>　$\mu : (\hat{\mathbb{P}}^2, \hat{C}) \longrightarrow (\mathbb{P}^2, C)$ を、非特異モデルとすると、$\mathcal{A}_{\mathbb{P}^2-C}$ は、次のような構造をもつ。

$H^2(\hat{\mathbb{P}}^2)$ の基底を、$\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_l$　$(\beta_j{}^2 + \alpha^2 = 0)$

C の既約成分 C_j の proper transform $\hat{C}_j$ について、

$H^0(C_j)$ の基底を b_j、

exceptional divisor $\mathcal{E}_k$ について、

$H^0(\mathcal{E}_k)$ の基底を e_k、

また、$H^1(\hat{C}_j)$ の基底を、

$c_{j1}, \cdots c_{j2g}$　$(g = \text{genus}(\hat{C}_j))$　とおく。

i) d.g.a. $\mathcal{A}$ は、

$$\{b_j\}_j,\ \{\epsilon_k\}_k,\ \alpha,\ \{\beta_k\},\ \{c_{j1},\cdots,c_{j2g}\}$$
$$(1 \leqq k \leqq l)$$

によって、生成される。

ii) 微分 d は、次の式を満足する

$$d\epsilon_k = \beta_k$$

$$d\alpha = d\beta_1 = \cdots\cdots = d\beta_l = 0$$

$$d\beta_j = \delta_j\alpha - m_1\beta_1 - m_2\beta_2 - \cdots - m_l\beta_l$$

ここで、$\delta_j = \deg C_j$ で、m_j は、無限に近い特異点における重複度。

iii) 積構造は、intersection form によって、導かれる。

以上の $\mathcal{A}$ の構造より、定理の 主張は、示される。

<u>定理3</u>　、各特異点 p_j について、$S_j - K_j$ の d-fold cyclic covering を構成し、これを $\tilde{X}_j^d$ とする。$H_1(\tilde{X}_j^d)$ の生成元 $[e_j^1],\cdots,[e_j^{\mu(j)}]$ について、これらの 基本関係式と global な $\tilde{X}^d$ に関する $H_1(\tilde{X}^d)$ の presentation を、比較することによって証明される。(詳細は [2])

References

1 P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan, Real Homotopy theory of Kähler manifolds, Invent. math. 29 (1975), 245- 247

2 T. Kohno, Alexander Polynomials of Plane algebraic curves, (preprint)

3 J.W. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties, Publ. math. I.H.E.S. (1978) 137 - 204

4 M. Schlessinger, J, Stasheff Defornation theory and rational homotopy type (preprint)

5 D. Sullivan, Infinitesimal Computations in Topology, Publ. math. I.H.E.S. 47 (1977) 269 - 331

6 O. Zariski, On the existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, Amer. J. of Math. 51 (1929) 305 - 328

7 ---------- On the linear connection index of the algebraic sur surfaces $z^n = f(x,y)$, Proc. of Nat. Acad. of Sci. 15 (1929)

8 --------- On the irregularity of cyclic multiple planes Ann. of Math. 32 (1931) 485 - 511